VITTORIO EM. III

Digitized by Google

PROVINCIA

NAZIONALE
B. Prov.
BIBLIOTECA
VITT. EM. III
II.
180
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine
22621

N 3
N 4
B. Prov
III
180
Digitized by Google

611723
2
BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

DIE ELEMENTE

DER

MECHANIK DES HIMMELS,

AUF NEUEM WEGE

OHNE HÜLFE HÖHERER RECHNUNGSARTEN

DARGESTELLT

VON

AUGUST FERDINAND MÖBIUS,

PROFESSOR DER ASTRONOMIE ZU LEIPZIG, CORRESPONDENTEN DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN BERLIN UND MITGLIEDE DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN LEIPZIG.

MIT ZWEI FIGURENTAFELN.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

LEIPZIG,
WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.
1843.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAPOLI

Vorrede.

Die vorliegende Schrift hat die fortschreitende Bewegung der Himmelskörper und die Kräfte, durch welche diese Bewegung erzeugt wird, zu ihrem Gegenstande, und behandelt somit den durch Newton begründeten und von den vorzüglichsten Mathematikern und Astronomen der spätern Zeit bis in das feinste Detail ausgebildeten Theil der Naturforschung. Gewiss war es jederzeit vielen Freunden der Astronomie und der Naturwissenschaften wünschenswerth, nicht bloss die höchst interessanten Resultate dieser Untersuchungen, sondern auch ihren innern Zusammenhang und ihre Entwickelung aus den ersten Principien, und diese Entwickelung nicht bloss durch eine übersichtliche Erläuterung, sondern streng mathematisch begründet, kennen zu lernen. Allein nur Wenigen unter ihnen war es möglich, diesen Wunsch zu befriedigen, weil das Studium der Werke, in denen die gedachten Forschungen niedergelegt sind, nicht wenig Zeit und beträchtliche Vorkenntnisse aus der höhern Analysis erfordert. Ich glaube daher Vielen einen angenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich ihnen in dieser Schrift einen Weg zeige, auf welchem sie, ohne andere mathematische Kenntnisse, als die, welche schon auf den Schulen erlernt werden, zu besitzen, mit den Geheimnissen der planetarischen Bewegungen sich in Kurzem vertraut machen können.

Die Schrift zerfällt in vier Abschnitte.

Der erste enthält die zum Verständnisse des Folgenden erforderlichen Lehren der Dynamik, und dürfte sich von den bisherigen Darstellungsweisen dieser Wissenschaft besonders dadurch unterscheiden, dass ich mehr als gewöhnlich nach Veranschaulichung der Begriffe und Sätze mit Hülfe einfacher geometrischer Betrachtungen gestrebt habe; und nächstdem dadurch, dass ich die in der Dynamik unentbehrlichen Elemente der Differentialrechnung so weit, als es für den nächsten Bedarf nöthig war, aus dem Begriffe der Bewegung selbst erst entwickelt und sie demgemäss als eine Rechnung mit den Geschwindigkeiten hingestellt habe, mit denen sich von der Zeit abhängige Grössen ändern.

Bei dieser Darstellung der Dynamik spielt besonders die gleich zu Anfange behandelte Lehre von der Zusammensetzung gerader Linien eine wichtige Rolle. Weil Geschwindigkeiten und Kräfte ihrer Richtung nnd Grösse nach als gerade Linien sich darstellen lassen, so ist mit der Zusammensetzung gerader Linien zugleich die von Geschwindigkeiten und Kräften erklärt; auch die Zusammensetzung irgend welcher Bewegungen von Punkten wird sehr einfach auf die von geraden Linien zurückgeführt; späterhin wird auf dieselbe Lehre die Theorie des Schwerpunktes gegründet, und endlich wird eben daraus noch die Zusammensetzung ebener Flächen abgeleitet. — Somit erscheinen die Hauptgegenstände der Dynamik durch den Begriff der geometrischen Zusammensetzung, wie durch einen Faden, mit einander verbunden, und ich glaube, dass die hier und da neuen Darstellungsweisen, zu denen ich durch diesen Faden geleitet worden, wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit einige Berücksichtigung verdienen.

Mit Hülfe des Fourier'schen Satzes, dass jede Function einer veränderlichen Grösse in eine nach den Sinussen

oder Cosinussen der Vielfachen der Veränderlichen fortlaufende Reihe entwickelt werden kann, lässt sich leicht zeigen, dass jede Bewegung eines Punktes durch Zusammensetzung gleichförmiger Kreisbewegungen so nahe, als man will, dargestellt werden kann. Insbesondere wird hiernach die nahe kreis- und gleichförmige Planetenbewegung ausgedrückt werden können durch Zusammensetzung einer gleichförmigen Kreisbewegung, welche die mittlere Bewegung des Planeten darstellt, mit andern Bewegungen derselben Art, nur dass bei letztern die Halbmesser der Kreise ungleich kleiner, als bei der erstern, sind. Als Vorbereitung zu der Lehre von der Planetenbewegung habe ich daher am Ende des ersten Abschnittes die — obwohl nur dem Scheine nach — in der Astronomie veraltete und verachtete Theorie der Epicykeln wieder in's Leben gerufen, und, wie ich glaube, nicht ohne guten Erfolg. Denn die ganz leicht sich ergebenden Formeln für die Kräfte, durch welche eine epicyklische Bewegung hervorgebracht wird, sind späterhin das Mittel, durch welches umgekehrt die von den störenden Kräften in den planetarischen Bewegungen bewirkten Ungleichheiten ohne Anwendung weiterer Kunstgriffe bestimmt werden.

Im zweiten Abschnitte werden die im ersten entwickelten Grundlehren der Dynamik auf den nach Kepler's Gesetzen geregelten Lauf der Planeten um die Sonne und der Nebenplaneten um ihre Hauptplaneten angewendet und die Kräfte bestimmt, durch welche diese Bewegungen hervorgebracht werden. Das Newton'sche Gesetz der allgemeinen Anziehung ist das endliche Resultat dieser Untersuchung. Es würde überflüssig sein, hier in das Einzelne näher einzugehen; nur auf die anderswo vielleicht noch nicht gemachte Bemerkung in §. 43. will ich noch hinweisen, dass nämlich die elliptische Ungleichheit der Planetenbewegung

von Ptolemäus sowohl, als von Copernikus, bis auf die erste Potenz der Excentricität richtig dargestellt worden ist*).

Den Beschluss dieses Abschnitts bilden die drei für jedes System sich anziehender oder abstossender Körper geltenden Principien der Erhaltung des Schwerpunktes, der Flächen und der lebendigen Kräfte, von denen ich die zwei ersten Principien, so wie auch die mit dem zweiten verbundene Theorie der unveränderlichen Ebene, ohne die sonst hierbei gewöhnliche Infinitesimalrechnung, durch geometrische Betrachtungen zu entwickeln gesucht habe.

Die noch folgenden zwei Abschnitte enthalten den interessantesten Theil der physischen Astronomie, die Theorie der Störungen oder der kleinen von den Kepler'schen Gesetzen sich zeigenden und dadurch erklärbaren Abweichungen, dass jeder Planet nicht bloss von der Sonne und jeder Tra-

*) In Beziehung auf den genannten §. 43. erlaube ich mir hier nachträglich die Bemerkung hinzuzufügen, dass die daselbst erklärte Hypothese des Copernikus etwas einfacher ausfällt, wenn man die zwei von ihm angewendeten Kreisbewegungen mit einander vertauscht. Ist nämlich S (Fig. 22.) die Sonne, M der Mittelpunkt der Bahn und zugleich der Mittelpunkt von FS, so lasse man einen Punkt G gleichförmig in der halben Umlaufszeit des Planeten L und nach derselben Richtung, wie L, den Kreis beschreiben, dessen Durchmesser FM ist, und lasse G durch M gehen, wenn L im Perihel oder im Aphel ist. L selbst beschreibt alsdann gleichförmig um G, als Mittelpunkt, einen Kreis, dessen Halbmesser = der mittlern Entfernung des L von S ist.

Die den Planeten treibende Kraft ist nach dieser Construction zusammengesetzt aus den zwei Kräften, welche die Kreisbewegungen von G und L hervorbringen. Führt man diese Zusammensetzung wirklich aus, sei es mit Anwendung der Formeln (A) und (B) in §. 34., oder auf geometrischem Wege, so wird man finden, dass die Kraft, sehr nahe wenigstens, nach S gerichtet und dem Quadrate von SL umgekehrt proportional ist.

bant nicht bloss von seinem Hauptplaneten, sondern zugleich von allen übrigen Körpern des Systems angezogen wird. Ich habe diese Theorie im dritten Abschnitte mit den Störungen des Mondes durch die Sonne eingeleitet, theils deshalb, weil hier, so lange man bei einer ersten Näherung stehen bleibt, fast gar keine Reihenentwickelung erfordert wird, und damit die ganze Rechnung sehr einfach ausfällt; theils, weil die wenigen Hauptstörungen des Mondes, sowohl die von dem jedesmaligen Stande desselben abhängigen (Variation, jährliche Gleichung und Evection), als die davon unabhängigen (die vorwärtsgehende Bewegung der Apsiden und die rückgängige der Knoten), als treue Vorbilder von eben so viel verschiedenen Arten von Störungen der Planeten angesehen werden können. Des Mittels, dessen ich mich zur Entwickelung der Störungen bedient habe, ist bereits Erwähnung geschehen. — Der Umstand, dass bei einem ersten Versuche die Bewegung der Mondsapsiden zu bestimmen, diese sich nur halb so gross als in der Wirklichkeit findet, wird Veranlassung, etwas Näheres über die Schärfung der Resultate durch Berücksichtigung der anfangs vernachlässigten höheren Potenzen der störenden Masse hinzuzufügen. Die Anwendung hiervon auf den vorliegenden Fall giebt mir die Apsidenbewegung bis auf den 13ten Theil der wahren richtig.

Im vierten Abschnitte werden die von den ersten Potenzen der störenden Masse, der Excentricitäten und der Neigung abhängigen Störungen, welche die Planeten auf einander ausüben, ganz auf dieselbe Art, wie die Störungen des Mondes durch die Sonne, entwickelt, nur dass ich hier nicht länger Anstand genommen habe, von der Differentialrechnung in ihrer gewöhnlichen Form Gebrauch zu machen. Die etwas grössere Mühe, die vielleicht deshalb und wegen

der nöthigen Reihenentwickelungen das Studium dieses Abschnitts dem weniger geübten Leser verursachen mag, wird in den Aufschlüssen, welche diese Rechnungen über die Stabilität unsers Planetensystems und seine pendelartigen Schwingungen im Laufe der Jahrhunderte geben, hinreichende Entschädigung finden. — Dass die Endresultate, sowohl hinsichtlich der periodischen als der secularen Störungen, mit den bekannten Formeln im zweiten Buche der *Mécanique céleste* übereinstimmen, braucht nicht besonders bemerkt zu werden.

In einem Anhange sind zwei Aufsätze hinzugefügt worden, welche insofern mit einander in Verbindung stehen, als in ihnen die gestörte Bewegung eines Planeten, als eine vollkommen elliptische mit sich stetig ändernden Elementen, betrachtet wird. Mit Hülfe dieser Betrachtungsweise, deren sich, wie bekannt, zuerst Euler bedient hat, und mit Anwendung des von Lagrange erfundenen unter dem Namen der störenden Function bekannten Kunstgriffes wird im ersten Aufsatze das schöne Theorem Lagrange's von der Unveränderlichkeit der grossen Axen bewiesen.

Der zweite Aufsatz sucht von der Berechnung der sogenannten speciellen Störungen, als wovon hauptsächlich bei den sehr excentrischen und unter allen Winkeln gegen die Ekliptik geneigten Kometenbahnen Gebranch gemacht wird, einen allgemeinen Begriff zu geben.

Den damit zusammenhängenden am Schlusse hingestellten Satz, welcher die Verrückung des Mittelpunkts der Bahn und damit die Aenderung ihrer Elemente erkennen lässt, wenn der Planet einen fremdartigen kleinen Stoss erhält, diesen Satz fand ich, als ich bei Lesung der kleinen, aber inhaltsreichen und geistvollen Schrift Airy's:

*Gravitation**) die darin auf ganz populäre Weise bestimmten Aenderungen, welche die Elemente des gestörten Planeten, nach Verschiedenheit seines Bahnorts und der Richtung der störenden Kraft, erleiden, mit einander verglich und sie in Einem Resultate zusammenzufassen suchte.

Wie ich bei dieser Gelegenheit noch bemerken möchte, scheint durch die Airy'sche Schrift der Wunsch in Erfüllung gegangen zu sein, welchen der Freiherr von Lindenau bereits im Jahre 1815 in der von ihm in Vereinigung mit Bohnenberger herausgegebenen *Zeitschrift für Astronomie***) ausgesprochen hat, „dass nämlich, obschon das Detail der Störungs-Entwickelungen anders als analytisch-numerisch nicht geschehen könne, doch der Gang der Untersuchung, hervorspringende Resultate, und das Bezeichnen der Punkte, wo die Wirkungen ein Grösstes werden, Sache des Raisonnements und der Construction sein sollte, ... und dass es daher der Beurtheilung der Geometer anheim gegeben sein möchte, ob sich nicht für die möglichen Combinationen der Lage zweier Planeten Constructionen ersinnen liessen, welche eine Uebersicht der Hauptmomente ihrer gegenseitigen Störungen gewährten.“

In der That hat Airy in der genannten Schrift die Störungen ohne allen Calcul, bloss durch einfache auf das Princip der Variation der Elemente gegründete Betrachtungen, erklärt und damit seinen Lesern eine Einsicht in den Mechanismus des Ganzen verschafft, welche der in anderer Be-

*) Der vollständigere Titel ist: *Gravitation, an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system ... London* 1834. Durch K. L. v. Littrow ist hiervon eine deutsche Uebersetzung besorgt worden: *Airy's populäre physische Astronomie ... Stuttgart* 1839.

**) I. Band, Seite 33 und 34.

ziehung allerdings bei Weitem überlegenere Calcul nicht zu gewähren vermag.

Auch im vorliegenden Buche habe ich in einigen besonders einfachen Fällen von vorher durch Rechnung gefundenen Störungen die Nothwendigkeit ihres Vorhandenseins und ihre allgemeine Beschaffenheit durch blosse Betrachtung der Natur der störenden Kraft darzuthun gesucht; auch ist dahin noch die am Schlusse des Ganzen mit Hülfe des vorhin gedachten Satzes untersuchte Bewegung eines Planeten in einem widerstehenden Mittel zu rechnen. Mehreres dieser Art hinzuzufügen war gegen den Plan des Buchs.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Die Grundlehren der Dynamik.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung der Punkte.

§. 1. Sätze, die gegenseitige Lage von Punkten betreffend. — §. 2. Zusammensetzung gerader Linien. — §. 3. Zerlegung einer geraden Linie in zwei oder mehrere; bestimmte hierbei mögliche Aufgaben. — §. 4. Erklärungen und Sätze, die gegenseitige Bewegung von Punkten betreffend. — §. 5. Zusammensetzung von zwei und — §. 6. mehrern Bewegungen. — §. 7. Zerlegung einer Bewegung in zwei oder mehrere.

Von der Geschwindigkeit. §§. 8. 9. Bestimmung der Geschwindigkeit bei sich gleichförmig und geradlinig bewegenden Punkten; — §. 10. bei einer ungleichförmigen Bewegung. Von der gleichförmig beschleunigten Bewegung. — §. 11. Bestimmung der Geschwindigkeit bei einer mit der Zeit sich ändernden Grösse überhaupt. Erste Sätze der Fluxionen- oder Differentialrechnung. — §. 12. Die Geschwindigkeit betreffende Sätze bei Zusammensetzung, Zerlegung und Projection von Bewegungen. — §. 13. Wie von der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes auf seine Bewegung selbst geschlossen werden kann. — §. 14. Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung auf einen Durchmesser des Kreises.

Zweites Kapitel.

Von den Wirkungen der Kräfte.

§. 15. Ueber die Natur der nun folgenden Untersuchungen. Gesetz der Trägheit. — §. 16. Aus der Statik entlehnte Definitionen und Sätze. — §. 17. Dynamischer Grundsatz. — §§. 18. 19. Folgerungen aus demselben bei stossweise wirkenden Kräften. — §§. 20. 21. Von beschleunigenden Kräften, insbesondere bei der geradlinigen Bewegung; — §. 22. bei der krummlinigen. Ausdruck der beschleunigenden Kraft durch die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers ändert. — §. 23. Kraft bei einer gleichförmigen

Kreisbewegung; bei einer gleichförmigen Bewegung überhaupt; Normalkraft, Tangentialkraft; allgemeiner Satz. — §. 24. Die Kraft betreffende Sätze bei Zusammensetzung, Zerlegung und Projection von Bewegungen. Beispiel einer elliptischen Bewegung, bei welcher der vom Mittelpunkte der Ellipse ausgehende Radius der Zeit proportionale Flächen überstreicht. — §. 25. Wie aus der einen Körper beschleunigenden Kraft rückwärts seine Bewegung bestimmt werden kann. Anwendung hiervon auf den Fall, wenn die Kraft dem Abstande des Körpers von einem festen Punkte proportional ist. — §. 26. Hieraus abgeleitete Theorie des einfachen Pendels. — §. 27. Parabolische Bewegung eines Körpers, wenn die ihn beschleunigende Kraft ihre Richtung und Grösse nicht ändert. Merkwürdige dabei stattfindende Relationen.

Drittes Kapitel.

Theorie der epicyklischen Bewegung.

§§. 28—30. Begriff der epicyklischen Bewegung. Formeln für die rechtwinkligen Coordinaten eines sich epicyklisch in einer Ebene bewegenden Körpers und für die Kräfte, welche diese Bewegung hervorbringen. — §§. 31. 32. Transformation dieser Formeln bei Anwendung von Polarcoordinaten. — §§. 33. 34. Näherungsformeln für den Fall, wenn die Bewegung sehr nahe kreis- und gleichförmig ist. Geometrische Erörterungen. — §. 35. Formeln für die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Polarcoordinaten ändern, für die Flächengeschwindigkeit des Radius und für die Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers selbst. — §. 36. Streng richtige Formeln für die Kräfte, durch welche eine durch Polarcoordinaten gegebene Bewegung in einer Ebene hervorgebracht wird. — §. 37. Einfache Relation zwischen der auf dem Radius perpendikularen Kraft und der Geschwindigkeit der Flächengeschwindigkeit. Betrachtung des Falles, wenn die Flächengeschwindigkeit null ist, und folglich der Radius der Zeit proportionale Flächen beschreibt. Geometrischer Beweis der Formeln in §. 36. — §. 38. Bestimmung der Kräfte bei einem sich nicht in einer Ebene bewegenden Körper.

Zweiter Abschnitt.

Von den Kräften, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper hervorgebracht werden.

Erstes Kapitel.

Von der elliptischen Bewegung der Planeten.

§. 39. Die drei Kepler'schen Gesetze. — §§. 40. 41. Erklärung von Kunstausdrücken. — §. 42. Geringe Excentricität der Planetenbahnen. — §§. 43—45. Polarcoordinaten eines Planeten in seiner Bahn-

ebene, wenn bloss die erste Potenz der Excentricität berücksichtigt wird. Mit dieser Genauigkeit ist die Planetenbewegung bereits von Ptolemäus und Copernikus dargestellt worden. Relation zwischen der mittlern Entfernung und der mittlern Bewegung. — §. 46. Kleinheit der gegenseitigen Neigung der Bahnebenen. — §§. 47. 48. Formeln zur Berechnung der drei Polarcoordinaten eines Planeten im Raume: Länge, Breite und Radius Vector. Hierzu hat man sechs Stücke, die Elemente der Bewegung, zu wissen nöthig. Reduction der Länge eines Planeten in seiner Bahn auf die Grundebene.

§. 49. Die vollkommene elliptische Bewegung betreffende Formeln und Sätze. Polargleichung der Ellipse. — §. 50. Aus der wahren Anomalie die mittlere zu finden. — §. 51. Das umgekehrte Problem; Lösung desselben durch Reihen. — §. 52. Bestimmung der Geschwindigkeiten der veränderlichen Grössen, welche bei der Bewegung eines Planeten in Betracht kommen. — §. 53. Die sechs Elemente der Bewegung eines Planeten zu finden, wenn für einen gewissen Zeitpunkt sein Ort und seine Geschwindigkeit gegeben sind.

Zweites Kapitel.

Bestimmung der Kräfte, durch welche die elliptische Bewegung der Planeten erzeugt wird.

§. 54. Bestimmung dieser Kräfte unter der Voraussetzung, dass die Planetenbahnen Kreise sind, in deren Mitte sich die Sonne befindet. — §. 55. Bestimmung der Kräfte bei der elliptischen Bewegung und bei der Bewegung in einem Kegelschnitte überhaupt. Umgekehrte Folgerung. — §. 56. Einige Planeten werden von Trabanten begleitet, welche in ihren Bewegungen um erstere gleichfalls die Kepler'schen Gesetze befolgen. — §. 57. Bestimmung der auf die Trabanten wirkenden Kräfte.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Anziehungskraft.

§. 58. Anziehende Kraft der Sonne und der von Trabanten begleiteten Planeten, geschlossen aus den Bewegungen der um sie laufenden Körper. — §. 59. Bei zwei Körpern kann nie eine bloss einseitige Anziehung statt finden, sondern sie ist immer gegenseitig. — §. 60. Nicht je zwei Körper, werden durch Kräfte, welche nach der Definition in der Statik einander gleich sind, auch in gleiche Geschwindigkeiten versetzt. — §. 61. Entstehung des Begriffs der Masse. Unterschied zwischen beschleunigender und bewegender Kraft; Anwendung hiervon auf einander anziehende Körper. — §. 62. Je zwei Himmelskörper ziehen einander an; Gesetz, nach welchem dieses geschieht. — §. 63. Die Kraft, mit welcher ein Himmelskörper den andern anzieht, erstreckt sich auf alle einzelnen Theilchen der Körper. Auch je zwei Theilchen desselben Körpers ziehen einander

an. — §. 64. Von Newton entdecktes Gesetz der allgemeinen Anziehung.

Viertes Kapitel.
Nächste Folgen aus dem Gesetze der allgemeinen Anziehnng.

§. 65. Proportion zwischen mittlern Entfernungen, Umlaufszeiten nnd Massen von verschiedenen Paaren sich um einander bewegender Körper. — §. 66. Anwendung dieser Proportion, nm für diejenigen Körper des Planetensystems, welche Begleiter haben, das Verhältniss zwischen ihren Massen zn finden. Berechnung der Massen der Erde und des Jupiter im Verhältnisse zur Sonnenmasse. Angabe der übrigen Planetenmassen. — §. 67. Von der Dichtigkeit. — §. 68. Dichtigkeiten der Sonne und der Planeten im Verhältnisse zur Dichtigkeit der Erde. Neueste Bestimmung der Masse und der Dichtigkeit des Merkur.

§. 69. Anziehung einer materiellen gleichförmig dichten Kugelfläche auf einen ausser ihr gelegenen materiellen Punkt. — §. 70. Zusätze. Die Anziehung der Kugelfläche auf einen irgendwo innerhalb derselben befindlichen Punkt ist null. — §. 71. Anziehung einer Kugel, welche in gleicher Entfernung von ihrem Mittelpunkte gleiche Dichtigkeit hat, auf einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt. Gegenseitige Anziehung zweier solcher Kngeln. Anwendung hiervon auf die Himmelskörper. — §. 72. Berechnung des Fallraums eines Körpers auf der Oberfläche der Erde aus der Bewegung des Mondes. Uebereinstimmung des Resultats mit dem unmittelbar beobachteten Fallraume. Allgemeine Schwere. Fallräume und Gewichte von Körpern auf den Oberflächen des Mondes nnd der Sonne.

Fünftes Kapitel.
Allgemeine Gesetze der Bewegnng bei einem System sich anziehender Körper.

§. 73. Einleitnng. — I. Das Princip der Erhaltnng des Schwerpnnktes. §. 74. Vom Mittelpnnkte eines Systems von Punkten. Haupteigenschaften desselben. — §. 75. Methoden den Mittelpunkt zu bestimmen; Eigenschaft desselben in Bezug auf Projectionen. — §. 76. Bewegung des Mittelpunktes bei einem System sich bewegender Punkte; Abhängigkeit der Geschwindigkeit des erstern und der ihn beschleunigenden Kraft von den Geschwindigkeiten der letztern nnd den sie beschlennigeuden Kräften. — §. 77. Zusätze von Vervielfachung der Bewegungen; von einander ähnlichen Bewegungen. Wie auf den Begriff der Bewegung die vier Species der Rechenkunst angewendet werden können. — §. 78. Uebergang vom Mittelpunkte zum Schwerpunkte. Schwerpunkt eines einzelnen Körpers. Methoden den Schwerpunkt eines Systems von Körpern zn finden. — §. 79. Bewegung des Schwerpunktes bei einem System sich bewegender Körper, und insonderheit bei einem

System, auf dessen Körper bloss ihre gegenseitigen Anziehungen wirken; allgemeines Princip. Anwendung auf das Planetensystem. — §§. 80. 81. Erläuterung des Princips vom Schwerpunkte an einem System von nur zwei Körpern; hieraus gefolgerte Grundeigenschaften des hyperbolischen Paraboloids.

II. Das Princip der Erhaltung der Flächen. §§. 82. 83. Entwickelung des Princips bei einem System von zwei und — §. 84. mehrern sich in einer Ebene bewegenden und einander anziehenden Körpern; — §. 85. bei einem System sich anziehender Körper im Raume überhaupt. — §. 86. Kurzer Ausdruck des Princips durch Einführung des Begriffs des Moments. Wie das Moment eines Systems sich bewegender Körper sich ändert, wenn der Punkt, oder — §. 87. die Ebene, worauf man das System bezieht, geändert wird. Zusammensetzung von Flächen. — §. 88. Unveränderliche Ebene des Systems, wenn der Schwerpunkt desselben ruht; — §. 89. wenn er sich bewegt. Lage der unveränderlichen Ebene des Planetensystems. — §. 90. Bestimmung der unveränderlichen Ebene eines Systems aus den relativen Bewegungen seiner Körper.

III. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte. §. 91. Erklärung des Princips; Beweis desselben bei einem System von nur zwei sich anziehenden Körpern. Zusatz, die Ausdehnung des Princips auf ein System von mehrern Körpern betreffend

Dritter Abschnitt.

Von den Störungen des Mondes durch die Sonne.

Erstes Kapitel.

Das Problem der drei Körper.

§. 92. Von Störungen im Allgemeinen. — §. 93. Bei jeder die Störungen betreffenden Aufgabe kommen zum wenigsten drei einander anziehende Körper in Betracht. — §. 94. Bestimmung der Kräfte, durch welche die Bewegung des einen der drei Körper in Bezug auf einen der beiden übrigen erzeugt wird. — §§. 95. 96. Reduction dieser Kräfte auf drei rechtwinklig coordinirte Kräfte. — §. 97. Uebergang zur Mondstheorie.

Zweites Kapitel.

Von den Kräften, durch welche die Bewegung des Mondes um die Erde gestört wird.

§. 98. Die Störungen des Mondes werden fast ausschliesslich durch die Sonne hervorgebracht. Warum dieselben, ungeachtet der sehr grossen Masse der Sonne, doch nicht allzubedeutend sein können. — §. 99. Entwickelung der Ausdrücke für die drei rechtwinklig coordinirten

den Mond störenden Kräfte. — §. 100. Ueber die verschiedenen Ordnungen der in diesen Ausdrücken vorkommenden Zahlen. — §. 101. Grösse und Richtung der den Mond in seiner Bahnebene störenden Kraft, nach Massgabe seines Standes gegen die Sonne. — §. 102. Wie durch die Störung die mittlere Entfernung und die mittlere Bewegung des Mondes geändert wird. — §. 103. Herleitung der in §. 101. erhaltenen Resultate aus geometrischen Betrachtungen.

Drittes Kapitel.

Von den vorzüglichsten Störungen des Mondslaufs und insbesondere von der Variation.

§. 104. Ungefähre Angabe der Methode, nach welcher die Störungen im Folgenden entwickelt werden sollen. — §§. 105. 106. Entwickelung der Störungen des Radius Vector und der Länge des Mondes, wenn die Excentricitäten der Monds- und der Sonnenbahn unberücksichtigt gelassen werden. — §. 107. Nähere Betrachtung der erhaltenen Störungen. — §. 108. Wie man sich von diesen Resultaten im Allgemeinen auch ohne Rechnung überzeugen kann. — §. 109. Störungsgleichungen; Coefficient, Argument und Periode einer Gleichung. Die jetzt gefundene Gleichung der Länge heisst die Variation — §. 110. Aus der Gleichung des Radius Vector abgeleitete Gleichung der Horizontalparallaxe. — §. 111. Angabe der von den Excentricitäten unabhängigen Gleichungen nach Damoiseau. Die parallaktische Gleichung.

Viertes Kapitel.

Von der jährlichen Gleichung.

§. 112. Allgemeine Formeln um aus den in der Bahnebene störenden Kräften die gestörte Bewegung selbst zu finden. — §§. 113. 114. Anwendung dieser Formeln auf Entwickelung der von der Excentricität der Sonnenbahn herrührenden Störungen. — §. 115. Die beträchtlichste unter ihnen heisst die jährliche Gleichung. Wie diese Gleichung sich in der Bewegung des Mondes zu erkennen giebt. — §. 116. Erklärung dieser Erscheinung im Allgemeinen.

Fünftes Kapitel.

Von der Evection.

§. 117. Einleitende Bemerkungen. — §§. 118—121. Entwickelung der periodischen Störungen, welche in der Excentricität der Mondsbahn ihren Grund haben. Hierbei kann man nicht mehr von den Näherungsformeln in §. 112. Gebrauch machen, sondern muss zu den streng gültigen in §. 36. zurückgehen. — §. 122. Die grösste unter den erhaltenen Störungen wird die Evection genannt; Wirkungsart derselben; ihre Entdeckung durch Ptolemäus. — §. 123. Die Evection lässt sich als eine zweite Mittelpunktsgleichung ansehen und hiernach — §. 124.

durch eine kreisförmige Bewegung des Mittelpunkts der Mondsbahn erklären.

Sechstes Kapitel.

Von dem Vorwärtsgehen der Apsiden der Mondsbahn.

§. 125. Zu Folge der im vorigen Kapitel erhaltenen Störnngsglieder, welche die mittlere Anomalie des Mondes znm Argumente haben, müssen der Radius Vector nnd die Länge des Mondes mit verschiedenen Excentricitäten berechnet werden. Eine in denselben Gliedern noch vorkommende Constante lässt auf ein Vorwärtsgehen der Apsiden schliessen. — 126. Eigenthümliche Art, auf welche sich diese zwei Ergebnisse vereinigt darstellen lassen. — §. 127. Newton's Verfahren die Apsidenbewegung zu bestimmen.

§. 128. Die jetzt gefundene Apsidenbewegung ist nur halb so gross, als in der Wirklichkeit; Geschichtliches. — §. 129. Wie die Störungsglieder höherer Ordnungen aus den schon entwickelten der vorhergehenden niederern Ordnnngen gefunden werden können. — §§. 130. 131. Anwendung hiervon, um die Grösse der Apsidenbewegnng durch Rücksichtnahme auf die Evection zu verbessern. Nahe Uebereinstimmung des Resultats mit der Natur.

Siebentes Kapitel.

Von der Seculargleichnng des Mondes.

§. 132. Sie besteht in einer Beschleunigung der mittlern Bewegung des Mondes und hat in der sich vermindernden Excentricität der Erdbahn ihren Grund. — §. 133. Analytische und nnmerische Entwickelung dieser Gleichung. — §. 134. Veranschaulichung ihrer Wirkung. Die jetzige Beschleunigung wird einst in eine Verzögerung übergehen. Aehnliche Seculargleichnngen in Bezug auf die Bewegnng der Apsiden und der Knoten des Mondes.

Achtes Kapitel.

Von den Störungen der Breite des Mondes.

§. 135. Wirkungsart der auf der Bahnebene perpendikularen Kraft. — §. 136. Bestimmung der auf der mittlern Ebene der Mondsbahn perpendikularen Kraft. — §. 137. Untersuchung der dadurch bewirkten Breite oder Ablenkung des Mondes von der mittlern Ebene. — §§. 138. 139. Periodische Aenderung dieser Breite, während die Knotenlinie der mittlern Ebene mit der Ekliptik, bei unveränderter Neigung beider Ebenen, sich in der Ekliptik gleichförmig rückwärts dreht. — §. 140. Breite des Mondes in Bezug auf die Ekliptik. — §. 141. Die Ursache der Knotenbewegung erklärt sich am einfachsten, wenn man die Bewegung des Mondes auf die Ekliptik unmittelbar bezieht. — §. 142. Wie die periodische Breitenstörung durch periodische Aenderungen der Neignng

und der Knotenlänge erklärt, und diese Aenderungen durch eine kreisförmige Bewegung der Pole der Mondsbahn dargestellt werden können.

Neuntes Kapitel.

Von der Bestimmnng der Elemente der Mondsbewegung.

§. 143. Einleitung. — §. 144. Zusammenstellung der Gründe für die Richtigkeit der im Bisherigen für die gestörte Mondsbewegnng entwickelten Formeln. — §. 145. Methode, nach welcher die Elemente der gestörten Bewegung bestimmt werden können. — §. 146. Hinzuzufügende Bemerkungen. — §. 147. Die Länge des Perihels und die Länge der Knoten ausgenommen, sind alle übrigen Elemente constant. — §. 148. Kurze Uebersicht der vorzüglichsten bisher erschienenen Tafeln und Theorieen des Mondes. — §. 149. Angabe der Elemente und der vorzüglichern Gleichungen der Mondsbewegung nach Damoiseau. Anmerkung über die Gleichungen, welche von der abgeplatteten Gestalt der Erde herrühren.

Vierter Abschnitt.

Von den gegenseitigen Störungen der Planeten.

Erstes Kapitel.

Von den Störnngen, welche von den Excentricitäten und der Neigung unabhängig sind.

§. 150. Das Verfahren, um die Planetenstörungen zu berechnen, wird dasselbe sein, welches im Vorhergehenden beim Monde angewendet wurde. — §§. 151. 152. Formeln für die auf den gestörten Planeten wirkenden Kräfte. — §. 153. Gestaltnng dieser Formeln, wenn die Excentricitäten unberücksichtigt gelassen werden. — §. 154. Entwickelung einer negativen Potenz der gegenseitigen Entfernung zweier Planeten in eine Reihe, welche nach den Cosinussen der Vielfachen des Längenunterschiedes beider Planeten fortgeht. — §. 155. Einzuschaltende goniometrische Formeln und Sätze. — §. 156. Gesetz, nach welchem die Coefficienten jener Reihe im Allgemeinen und — §. 157. in den speciellen hier zu beachtenden Fällen von einander abhängen. Bestimmung der Differentialquotienten der Coefficienten. — §. 158. Darstellung der störenden Kräfte mit Hülfe der entwickelten Reihen; die von den Excentricitäten unabhängigen Störnngen des Radius Vector und der Länge, aus diesen Reihen mit Anwendung der Formeln in §. 112. abgeleitet.

Zweites Kapitel.

Entwickelnng der von den Excentricitäten nnd der Neigung abhängigen Störungen.

§. 159. — §. 161. Die von den Excentricitäten des gestörten und des störenden Planeten abhängigen periodischen Störungen, mittelst der

Formeln in §. 36. entwickelt. — §. 162. Entwickelung der periodischen Breitenstörungen. — §. 163. Wie die auf einen Planeten von zwei oder mehrern andern gleichzeitig ausgeübte Störung zu berechnen ist.

Drittes Kapitel.
Theorie der Secularstörungen.

§§. 164. 165. Unbestimmbarkeit der Coefficienten der Anfangsglieder in den für die Coordinaten des Planeten vorhin erhaltenen Reihen. Diese Unbestimmbarkeit wird beim Radius Vector und der Länge aufgehoben, wenn man die Länge des Perihels und die Excentricität veränderlich annimmt. Geschwindigkeit dieser Aenderungen. — §. 166. Unterschied zwischen den Excentricitäten und den Längen des Perihels, mit denen das einemal der Radius Vector, das anderemal die Länge des Planeten zu berechnen ist. — §. 167. Zur Bestimmung des Anfangsgliedes für die Breite wird angenommen, dass sich die Bahnebene des gestörten Planeten an der des störenden unter constanter Neigung gleichförmig fortbewegt. Geschwindigkeit dieser Bewegung. — §. 168. Geschwindigkeiten, mit denen sich die Neigung und die Knotenlänge in Bezug auf eine beliebig angenommene feste Ebene ändern. — §. 169. Seculare Störungen im Gegensatze zu den periodischen. Die Secularstörung der mittlern Entfernung ist null. Inwiefern der mittlern Länge in der Epoche eine seculare Aenderung beigelegt werden kann. — §§. 170. 171. Seculare Bewegung der Pole der Bahnen zweier sich störenden Planeten, aus einer geometrischen Betrachtung hergeleitet. — §. 172. Analytische Entwickelung dieser Bewegung. — §. 173. Anwendung der Formeln auf Jupiter und Saturn. — §. 174. Die Secularänderungen der Excentricitäten und der Perihelien zweier sich störenden Planeten, durch eine ähnliche Analysis entwickelt. — §. 175. Anwendung auf Jupiter und Saturn. Bewegung der Mittelpunkte ihrer Bahnen. — §. 176. Merkwürdige Relation zwischen den Quadraten der Excentricitäten aller Planeten. — §. 177. Aehnliche Relation zwischen den Quadraten der Neigungen; hierin ist zugleich der Satz von der unveränderlichen Ebene begriffen.

Viertes Kapitel.
Von der Stabilität des Planetensystems.

§. 178. Sie beruht auf der Unveränderlichkeit der mittlern Entfernungen und auf der fortwährenden Kleinheit der Excentricitäten und der Neigungen der Bahnen gegen die unveränderliche Ebene. Die Fortdauer dieser Kleinheit hat darin ihren Grund, dass alle Planeten sich nach einerlei Richtung um die Sonne bewegen. — §. 179 Warum keine periodische Störung einen allzugrossen Werth erreichen kann. — §. 180. Die grossen Gleichungen Jupiters und Saturns nach Bouvard. — §. 181. Beweis, dass durch die Wechselwirkung zweier Planeten die mittlere Bewegung des einen sich verringert, wenn die des andern

grösser wird, und umgekehrt. Näherungsweise ausgedrücktes Verhältniss zwischen den Coefficienten der grossen Gleichungen Jupiters und Saturns. — §. 182. Störungen von langer Periode bei andern Planetenpaaren. — §. 183. Bestimmung der Elemente eines gestörten Planeten.

Anhang.

I. Beweis der Unveränderlichkeit der mittlern Entfernungen, nach LAGRANGE.

Aenderung der Elemente der elliptischen Bewegung eines Planeten, wenn seine Geschwindigkeit durch einen Stoss geändert wird. — Die gestörte Bewegung kann man sich als eine elliptische vorstellen, deren Elemente sich fortwährend ändern. — Lagrange's Verfahren, um die nach einer beliebigen Richtung geschätzte störende Kraft zu finden. Die störende Function; Entwickelung derselben. Die hieraus gefolgerte Geschwindigkeit, mit welcher sich die mittlere Entfernung ändert, ist aus bloss periodischen Gliedern zusammengesetzt, weshalb die mittlere Entfernung selbst bloss periodische Störungen erleidet.

II. Ueber die Methode der speciellen Störnngen.

Allgemeiner Begriff dieser Methode; sie geht znnächst anf die Berechnung der Geschwindigkeiten aus, mit denen sich die Elemente ändern; die Geschwindigkeit der Aenderung des Parameters als Beispiel. — Neuer Satz, durch welchen man von den Aenderungen, welche die Elemente durch einen kleiuen Stoss erleiden, eine anschauliche Uebersicht gewinnt. Erläuterung dieses Satzes durch die Bewegung eines Planeten in elnem widerstehenden Mittel.

Erster Abschnitt.

Die Grundlehren der Dynamik.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung der Punkte.

§. 1.

Die Lage eines Punktes B (Fig. 1.) gegen einen andern A ist gegeben, wenn sein Abstand von A und die Richtung der Abstandslinie AB gegeben sind. Ein dritter Punkt B' hat demnach gegen einen vierten A' dieselbe Lage, welche B gegen A hat, wenn die zwei geraden Linien AB und $A'B'$ gleich lang sind und einerlei Richtung haben.

Dass zwei gerade Linien AB und $A'B'$ gleiche Länge und einerlei (nicht entgegengesetzte) Richtung haben, werde hier kurz durch $AB \equiv A'B'$ ausgedrückt. Mit dieser Bezeichnung können wir sogleich folgende aus den ersten Elementen der Geometrie fliessende Sätze aufstellen:

I. Ist $AB \equiv A'B'$, so ist auch $AA' \equiv BB'$.

II. Ist $AA \equiv BB'$ und $BB' \equiv CC'$, so ist auch $AA' \equiv CC'$.

III. Ist $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$, so ist auch $AC \equiv A'C'$; und eben so $AD \equiv A'D'$, wenn noch $CD \equiv C'D'$ ist; u. s. w.

Versteht man analoger Weise unter der Formel $AB \equiv m \,.\, A'B'$, dass die Linien AB und $A'B'$ einerlei Richtung haben, und dass die Länge der erstern das $m$fache der Länge der letztern ist, wo m jede ganze oder gebrochene positive Zahl sein kann, so kann man den Satz III. folgendergestalt verallgemeinern:

IV. Ist $AB \equiv m . A'B'$, $BC \equiv m \,.\, B'C'$, $CD \equiv m \,.\, C'D'$, etc., so ist auch $AC \equiv m \,.\, A'C'$, $AD \equiv m \,.\, A'D'$, etc. (Siehe Fig. 2., wo $m = 3$ ist.) Alsdann nämlich sind die Figuren $ABCD$.. und $A'B'C'D'$.. einander blos ähnlich, in dem Verhältnisse $m : 1$, während sie in III. einander gleich und ähnlich

waren. In beiden Fällen aber haben sie eine direct ähnliche Lage. — Wir können noch hinzusetzen:

V. Ist $AB \equiv m \,.\, B_1 A_1$, $BC \equiv m \,.\, C_1 B_1$, $CD \equiv m \,.\, D_1 C_1$, etc., so ist auch $AC \equiv m \,.\, C_1 A_1$, $AD \equiv m \,.\, D_1 A_1$, etc. Auch hier sind die Figuren $ABC\ldots$ und $A_1 B_1 C_1\ldots$ in dem Verhältnisse $m:1$ einander ähnlich, haben aber eine verkehrt ähnliche Lage.

§. 2.

Sind mehrere gerade Linien AB, CD, EF (Fig. 3.) ihrer Grösse und Richtung nach gegeben, und trägt man dieselben, von einem beliebigen Punkte O ausgehend, parallel mit ihren Richtungen an einander, macht man also $OP \equiv AB$, $PQ \equiv CD$, $QR \equiv EF$, so heisst die gerade Linie OR, welche den Anfangspunkt mit dem Endpunkte der dadurch entstandenen gebrochenen Linie $OPQR$ verbindet, aus den Linien AB, CD, EF zusammengesetzt, — oder auch die Lage von R gegen O zusammengesetzt aus den Lagen von B gegen A, von D gegen C und von F gegen E.

Folgerungen. *a*. Die Linie OR bleibt dieselbe, wenn statt der Linien AB, CD, EF irgend andere ihnen gleiche und parallele genommen werden ((§. 1. II.). Man kann daher OR auch zusammengesetzt aus OP, PQ, QR selbst, und überhaupt jede Seite eines Vielecks als zusammengesetzt aus den jedesmal übrigen ansehen, dafern man nur jede der letztern nach der Richtung nimmt, nach welcher sie von einem den Perimeter des Vielecks beschreibenden Punkte durchlaufen wird, die Richtung der erstern aber die entgegengesetzte sein lässt. — So ist z. B. von den drei Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks, CB aus CA und AB; AC aus AB und BC; BA aus BC und CA zusammengesetzt.

b. Wenn man, statt von O, von irgend einem andern Punkte O' ausgehend, die gegebenen Linien AB, CD, EF parallel mit ihren Richtungen an einander trägt und damit die gebrochene Linie $O'P'Q'R'$ bildet, so ist $O'R' \equiv OR$ (§. 1. III.).

c. Hat man, von O ausgehend, $OP \equiv AB$, $PQ \equiv CD$, $QR \equiv EF$ gemacht, so wird man zu demselben Punkte R auch gelangen, wenn man z. B. von P aus parallel mit sich

zuerst EF und sodann CD trägt. Denn macht man $PQ' \equiv EF$, so ist auch $PQ' \equiv QR$ und daher (§. 1. I.) $Q'R \equiv PQ \equiv CD$. Je zwei nächstfolgende der zusammenzusetzenden Linien können daher mit einander vertauscht werden. Da sich nun aus einer gegebenen Folge mehrerer Elemente durch successive Vertauschung je zweier nächstfolgenden alle andern Folgen ableiten lassen, — aus der Folge *abc* z. B. die Folgen *acb*, *cab*, *cba*, etc. — so kann die Ordnung, in welcher man die gegebenen Linien nach und nach zusammensetzt, jede beliebige sein.

Weil endlich nach *b.* eine veränderte Annahme des Ausgangspunktes O keinen Einfluss auf die Grösse und Richtung der zusammengesetzten Linie hat, so schliessen wir:

Die aus mehrern geraden Linien zusammengesetzte Linie bleibt ihrer Grösse und Richtung nach dieselbe, welches auch der Ausgangspunkt und welches die Ordnung ist, in welcher die erstern Linien an einander gesetzt werden.

d. Ist AB aus CD und EF zusammengesetzt, so ist es CD aus AB und FE; EF aus AB und DC; BA aus DC und FE; u. s. w. Die Richtigkeit hiervon erhellet durch Ansicht von Fig. 3*., und man sieht von selbst, wie Analoges auch bei Systemen von noch mehrern Linien statt finden muss.

e. Noch können wir aus §. 1. IV. folgern: Ist eine Linie aus mehrern andern ($A'D'$ aus $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$) zusammengesetzt, so ist auch das *m*fache der erstern aus den *m*fachen der letztern (AD aus AB, BC, CD) zusammengesetzt.

§. 3.

Eine gerade Linie in zwei oder mehrere gerade Linien **zerlegen**, heisst Linien angeben, durch deren Zusammensetzung die erstere Linie wieder erhalten wird. Offenbar gehört diese Aufgabe zu den unbestimmten und kann nur durch Hinzufügung gewisser Bedingungen eine bestimmte werden. Die einfachsten unter dergleichen bestimmten Aufgaben sind folgende drei:

I. Eine Linie AB (Fig. 4.) in zwei andere zu zerlegen, welche parallel mit zwei Geraden a und b sind, die

in einer mit AB parallelen Ebene liegen und sich darin schneiden.

Auflösung. Man ziehe durch A eine Parallele AE mit a und durch B eine Parallele BF mit b, welche die AE schneiden wird. Geschehe dieses in C, so sind AC und CB die gesuchten Linien. Es kann aber AB nicht noch in zwei andere mit a und b parallele, aber von AC und CB der Länge nach verschiedene Linien zerlegt werden, indem es sonst ausser C noch einen Punkt geben müsste, der so läge, dass die von ihm nach A und B gezogenen Linien resp. mit a und b parallel wären.

II. Eine Linie AD in zwei zu zerlegen, von denen die eine parallel mit einer Ebene ε und die andere parallel mit einer die ε schneidenden Geraden c ist.

Auflösung. Man lege durch A eine mit ε parallele Ebene und durch D eine mit c parallele Gerade, welche jene Ebene in B treffe, so sind AB und BD die gesuchten Linien. — Dass auch hier die Zerlegung nicht noch auf andere Art möglich ist, erhellet aus ähnlichem Grunde wie vorhin.

III. Eine Linie AD in drei zu zerlegen, welche parallel mit drei sich in einem Punkte schneidenden und nicht in derselben Ebene enthaltenen Geraden a, b, c sind.

Auflösung. Man zerlege nach II. die Linie AD in zwei andere AB und BD, welche resp. mit der durch die Geraden a und b bestimmten Ebene und mit der Geraden c parallel sind. Man zerlege hierauf nach I. die Linie AB in zwei mit a und b parallele Linien AC und CB, und es werden AC, CB und BD die verlangten sein. — Da jede dieser zwei Zerlegungen nur auf eine Weise möglich ist, so können auch hier statt der drei erhaltenen Linien nicht noch andere von denselben Richtungen aber andern Längen gefunden werden.

Zusatz. Liegt die Linie AB in der durch die Geraden a und b bestimmten Ebene selbst, so kann man sie nach a und b auch dadurch zerlegen, dass man ihre Endpunkte A, B durch Parallellinien mit b und mit a auf a und auf b projicirt (Fig. 5.). Denn die somit sich ergebenden Projectionen $A'B'$ und $A''B''$ von AB auf a nnd b sind, wie die

Figur zeigt, resp. $\equiv$ den vorigen AC nnd CB, nnd daher die gesuchten Linien.

Aehnlicherweise wird eine Linie nach der Ebene ε und der Geraden c dadurch zerlegt, dass man ihre Endpunkte durch Parallellinien mit c auf die Ebene ε nnd durch Parallelebenen mit ε auf die Gerade c projicirt. — Eben so wird man endlich eine Linie nach den drei Geraden a, b, c zerlegen, wenn man ihre Endpunkte auf jede der drei Geraden (z. B. auf c) durch Ebenen projicirt, welche mit der durch die jedesmal zwei übrigen Geraden (a und b) bestimmten Ebene parallel sind.

§. 4.

Die Bewegung eines Pnnktes ist gegeben, wenn für jeden Zeitpunkt sein Ort im Raume gegeben ist. — Im Folgenden werden wir durch T_0, T_1, T_2, ... in unbestimmten Intervallen auf einander folgende Zeitpunkte, und durch A_0, A_1, A_2, ...; B_0, B_1, B_2, ...; etc. die Oerter bezeichnen, welche die sich bewegenden Punkte A, B, etc. in jenen Zeitpunkten einnehmen.

Die Bewegung eines Punktes gegen einen andern ist gegeben, wenn für jeden Zeitpunkt die Lage des einen gegen den andern (§. 1.) gegeben ist.

Von zwei Punkten A und B sagt man, dass sie einander gleiche Beweguugen haben, wenn die Lage des einen gegen den andern unverändert bleibt, — also wenn $A_0B_0 \equiv A_1B_1 \equiv A_2B_2 \equiv$ etc. (Fig. 6.). Es folgt hieraus $A_0A_1 \equiv B_0B_1$, $A_1A_2 \equiv B_1B_2$, etc., und man kann daher die Gleichheit der Bewegungen von A und B auch dadurch definiren, dass immer die Lage des Ortes A_0, welchen der Punkt A in irgend einem Zeitpunkte T_0 einnimmt, zu seinem Orte A_1 in irgend einem andern Zeitpunkte T_1 dieselbe ist, welche der Ort B_0 des Punktes B im erstern Zeitpunkte zu seinem Orte B_1 im letztern hat.

Man sagt, dass ein Pnnkt D gegen einen andern C dieselbe Bewegung habe, welche ein dritter B gegen einen vierten A hat, wenn stets D gegen C dieselbe Lage, wie B gegen A, hat, also wenn $C_0D_0 \equiv A_0B_0$, $C_1D_1 \equiv A_1B_1$, etc.

(Fig. 7.) und überhaupt $CD \equiv AB$ ist. Es folgt hieraus $CA \equiv DB$; mithin hat dann auch D gegen B dieselbe Bewegung, wie C gegen A. Die vier Punkte A, B, D, C bilden dann immer ein Parallelogramm.

Folgerungen. *a.* Haben zwei Punkte einander gleiche Bewegungen und fallen sie in irgend einem Zeitpunkte zusammen, so thuen sie dies auch in jedem andern.

b. Hat D gegen C dieselbe Bewegung, wie B gegen A, und sind A und C ruhende Punkte, oder ihre Bewegungen einander gleich, so sind auch die Bewegungen von B und D einander gleich. Denn alsdann ist $BD \equiv AC \equiv$ einer Linie, deren Grösse und Richtung sich nicht ändert.

§. 5.

Die Bewegung eines Punktes P (Fig. 8.) heisst aus denen zweier anderer Punkte A und B zusammengesetzt, wenn die Lage von P gegen einen beliebig wo angenommenen festen Punkt F stets aus den Lagen von A und B gegen F zusammengesetzt ist, oder — was auf dasselbe hinauskommt — wenn der vierte Punkt F, mit welchem die sich bewegenden A, P, B in dieser Folge ein Parallelogramm bilden, ein ruhender ist. Denn weil FP aus FA und FB zusammengesetzt sein soll, und es FP immer aus FA und AP ist, so muss $AP \equiv FB$, und folglich $APBF$ ein Parallelogramm sein.

Sind hiernach für verschiedene Zeitpunkte T_0, T_1, T_2, .., die Oerter von A und B, und für einen derselben, T_0, der Ort P_0 von P gegeben, so findet man die Oerter von P für die übrigen, wenn man zuerst $B_0F \equiv P_0A_0$, und, nachdem somit F bestimmt worden, $A_1P_1 \equiv FB_1$, $A_2P_2 \equiv FB_2$, etc. macht.

Ohne zu F zurückzugehen, kann man aus P_0 jeden der übrigen Oerter von P, wie P_1, auch dadurch finden, dass man $P_0X \equiv A_0A_1$ und $XP_1 \equiv B_0B_1$ macht, dass man also P_0P_1 aus A_0A_1 und B_0B_1 zusammensetzt. In der That ist nach dieser Construction $A_1X \equiv A_0P_0 \equiv FB_0$, zugleich aber $XP_1 \equiv B_0B_1$, folglich (§. 1. III.) $A_1P_1 \equiv FB_1$, wie vorhin. Auf gleiche Weise lässt sich P_2 finden, indem man P_0P_2

aus $A_0 A_2$ und $B_0 B_2$, oder auch $P_1 P_2$ aus $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ zusammensetzt; u. s. w.

Die Lage von P gegen P_0 ist hiernach aus den gleichzeitigen Lagen von A gegen A_0 und von B gegen B_0 stets vollkommen bestimmt, und es müssen daher alle Bewegungen von P, die man für verschiedene Annahmen von P_0, mithin auch von F, erhält, also alle aus den Bewegungen von A und B zusammengesetzten Bewegungen, einander gleich sein.

Zusätze. *a*. Nach der Formel $AP \equiv FB$ kann man die aus den Bewegungen von A und B zusammengesetzte Bewegung von P auch als diejenige erklären, bei welcher die Bewegung von P gegen den einen (A) der beiden Punkte A und B dieselbe ist, welche der andere (B) gegen einen festen Punkt F hat. Um sich dieses noch anschaulicher zu machen, stelle man sich vor, dass, während B seine Bewegung gegen F unverändert behält, dem F die Bewegung von A ertheilt wird; oder auch dass, während B in seiner ursprünglichen Bahn fortgeht, diese Bahn selbst in paralleler Lage so fortgeführt wird, dass einer ihrer Punkte, und damit auch alle übrigen, eine der Bewegung von A gleiche Bewegung erhalten. Denn dadurch wird B in eine aus seiner ursprünglichen und aus der Bewegung von A zusammengesetzte Bewegung gebracht.

b. Sind die Bewegungen von A und P gegeben, so kann man daraus umgekehrt die Bewegung von B gegen einen beliebig wo angenommenen festen Punkt construiren. Von beliebigen Bewegungen zweier Punkte A und P kann man daher immer die Bewegung des einen P als zusammengesetzt betrachten aus der des andern A und aus der von P gegen A, d. i. aus der Bewegung (von B), welche P haben würde, wenn bei seiner Bewegung gegen A letzterer Punkt in Ruhe wäre. So ist z. B. die Bewegung des Mondes zusammengesetzt aus der Bewegung der Erde und aus seiner Bewegung gegen die Erde.

§. 6.

Eben so, wie von zwei, können die Bewegungen auch von drei und mehrern Punkten A, B, C,... (Fig. 9.) zu-

sammengesetzt werden. Man beziehe nämlich den zweiten und die folgenden auf willkührliche feste Punkte F, G,... und lasse hierauf die Punkte P, Q,... sich so bewegen, dass P gegen A dieselbe Bewegung, wie B gegen F; Q gegen P dieselbe, wie C gegen G; u. s. w. hat. Denn damit ist die Bewegung von P aus denen von A und B, die Bewegung von Q aus denen von P und C, d. i. aus denen von A, B und C, u. s. w. zusammengesetzt. Dabei ist, wie vorhin, für je zwei Zeitpunkte T_0 und T_1 die Linie P_0P_1 aus A_0A_1 und B_0B_1, und so auch Q_0Q_1 aus P_0P_1 und C_0C_1 d. i. aus A_0A_1, B_0B_1 und C_0C_1 zusammengesetzt, u. s. w.

Letztere Eigenschaft der zusammengesetzten Bewegung kann man auch geradezu als Definition derselben gebrauchen, und hiernach *die Bewegung von X aus denen von A, B, C,... zusammengesetzt nennen, wenn für je zwei Zeitpunkte die Lage des Orts des Punktes X in dem einen gegen seinen Ort in dem andern Zeitpunkte zusammengesetzt ist aus den Lagen, welche die Oerter der Punkte A, B, C,... im erstern Zeitpunkte resp. gegen die Oerter derselben im letztern haben.*

Will man nach dieser Definition die Bewegung von X construiren, so bleibt der Ort von X für einen gewissen Zeitpunkt der Willkühr überlassen; die Oerter von X für alle andern Zeitpunkte sind damit vollkommen bestimmt, und alle bei verschiedener Annahme jenes willkührlichen Orts sich ergebenden Bewegungen sind einander gleich. Auch giebt diese Definition noch zu erkennen, dass eben so, wie bei mehrern geraden Linien (§. 2.), so auch bei mehrern Bewegungen die Ordnung, in welcher man sie nach und nach zusammensetzt, ganz willkührlich ist.

Da endlich nach §. 5. *b.* die Bewegung von P aus der von A und aus der von P gegen A, und eben so die von Q aus der von P und aus der von Q gegen P zusammengesetzt ist, so ist es auch die Bewegung von Q aus der von A und aus denen von P gegen A und von Q gegen P; und ähnlicherweise bei noch mehrern Bewegungen, welches auch dieselben sein mögen.

§. 7.

Die Bewegung eines Punktes P in zwei oder mehrere Bewegungen zerlegen, heisst Bewegungen von Punkten A, B, C, ... finden, durch deren Zusammensetzung die Bewegung von P wieder hervorgeht. Aus den Oertern A_0, B_0, ..., welche A, B, ... in irgend einem Zeitpunkte T_0 einnehmen, müssen hiernach die Oerter A_1, B_1, ... für irgend einen andern Zeitpunkt T_1 so bestimmt werden, dass die Linien A_0A_1, B_0B_1, ..., zusammengesetzt, die Linie P_0P_1 geben (vor. §.), d. h. man muss P_0P_1 in A_0A_1, B_0B_1, ... zerlegen (§. 3.). Die Aufgabe der Zerlegung einer gegebenen Bewegung wird daher eben so, wie die Aufgabe für die Zerlegung einer geraden Linie, im Allgemeinen unbestimmt sein, und durch Beifügung derselben Bedingungen, unter denen die letztere Aufgabe in eine bestimmte überging, wird auch die erstere eine solche werden.

Hiernach kann erstens eine in einer Ebene enthaltene Bewegung des Punktes P immer und nur auf eine Weise in zwei geradlinige Bewegungen zerlegt werden, deren Richtungen a und b in derselben Ebene enthalten und nicht mit einander parallel sind. — In der That, sind A und B die Projectionen von P auf a und b durch Parallelen mit b und a, so sind mit der Bewegung von P auch die von A und B gegeben; und da hierbei für je zwei Zeitpunkte T_0, T_1 die Linie P_0P_1 aus A_0A_1 und B_0B_1 zusammengesetzt ist (§. 3. Zus.), so sind die Bewegungen von A und B die gesuchten.

Eben so wird ferner die Bewegung eines Punktes im Raume überhaupt in zwei zerlegt, von denen die eine in einer Ebene ε, die andere in einer mit ε nicht parallelen Geraden c geschieht, oder in drei Bewegungen, welche in drei sich in einem Punkte schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Geraden a, b, c vor sich gehen, wenn man den Punkt auf die in §. 3. Zus. besagte Art im erstern Falle auf ε und c, im letztern auf a, b und c projicirt. Denn wie vorhin werden auch hier diese Projectionen die gesuchten und nur auf eine Weise bestimmbaren Bewegungen haben.

Von der Geschwindigkeit.

§. 8.

Die Bewegung eines Punktes wird **gleichförmig** genannt, wenn je zwei Theile des von ihm beschriebenen Weges sich wie die Zeiten verhalten, in denen sie beschrieben worden.

Wenn zwei sich gleichförmig bewegende Punkte A und B in derselben Zeit gleich lange Wege durchlaufen, so sagt man, dass sie sich mit gleicher **Geschwindigkeit** bewegen. Ist aber der von A durchlaufene Weg das $m$fache des Wegs, den B in derselben Zeit zurücklegt, so sagt man, dass A eine $m$mal so grosse Geschwindigkeit, als B, habe, und versteht hiernach unter dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten der beiden Punkte das Verhältniss der von ihnen in derselben Zeit beschriebenen Wege. Indem man daher einer gewissen gleichförmigen Bewegung eine Geschwindigkeit $= 1$ beilegt, kann man die Geschwindigkeit jeder andern gleichförmigen Bewegung durch eine Zahl ausdrücken. Man pflegt aber, nach Festsetzung der Maasseinheiten für Zeit und Raum, diejenige Geschwindigkeit $= 1$ zu setzen, mit welcher in jeder Zeitlänge $= 1$ ein Weg $= 1$ beschrieben wird.

Ein Punkt, der in jeder Zeiteinheit einen Weg $= c$ beschreibt, hat hiernach eine Geschwindigkeit $= c$, und legt in jeder Zeit $= t$ einen Weg $s = ct$ zurück; woraus noch folgt, dass die Geschwindigkeit c eines sich gleichförmig bewegenden Punktes erhalten wird, wenn man die Zahl s, welche irgend einen vom Punkte beschriebenen Weg ausdrückt, durch die Zahl t dividirt, welche die Zeit ausdrückt, in der dieser Raum beschrieben worden.

Da die Geschwindigkeit und der in der Zeiteinheit beschriebene Weg durch einerlei Zahl ausgedrückt werden, so pflegt man die Geschwindigkeit auch geradezu durch die Länge dieses Wegs, also durch eine benannte Zahl, anzugeben, z. B. eine Geschwindigkeit von 30 Fuss, von 4 Meilen, u. s. w.

§. 9.

Die einfachste unter allen Bewegungen ist die gleichförmige und geradlinige. Sind die Oerter A_0 und A_1 gegeben, welche ein sich auf solche Weise bewegender Punkt A in den Zeitpunkten T_0 und T_1 einnimmt, so kann man damit seinen Ort A_2 für jeden dritten Zeitpunkt T_2 finden. Denn es liegt A_2 mit A_0 und A_1 in gerader Linie, und es verhält sich $A_0 A_1 : A_1 A_2 = T_0 T_1 : T_1 T_2$ (wo $T_0 T_1$ die von den Zeitpunkten T_0 und T_1 begrenzte Zeitlänge bedeutet). Beides zugleich wird durch die Formel

$$T_1 T_2 \,.\, A_0 A_1 \equiv T_0 T_1 \,.\, A_1 A_2$$

dargestellt, welche daher der charakteristische Ausdruck für die geradlinige und gleichförmige Bewegung des Punktes A ist, so bald darin die 3 Zeitpunkte T_0, T_1 und T_2 ganz beliebig angenommen werden können.

Im Folgenden wollen wir in den Begriff der Geschwindigkeit eines sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Punktes, ausser ihrer Grösse, stets noch die Richtung mit aufnehmen, nach welcher sich der Punkt bewegt, und daher die Geschwindigkeit durch eine gerade Linie ausdrücken, welche die Richtung der Bewegung hat, und deren Länge dem in der Zeiteinheit beschriebenen Wege gleich ist. Hiernach werden wir eine Geschwindigkeit aus zwei oder mehrern andern Geschwindigkeiten zusammengesetzt nennen, wenn die Linie, welche die erstere ausdrückt, aus den die letztern ausdrückenden Linien zusammengesetzt ist.

§. 10.

Ist die Bewegung eines Punktes A nicht gleichförmig, oder nicht geradlinig, oder keines von beiden, so kann man doch immer die Zeit in so kleine Theile getheilt annehmen, dass die Bewegung während jedes dieser Theilchen oder Zeitelemente, wie man sie nennt, einzeln als geradlinig und gleichförmig betrachtet werden kann; und man wird daher unter der Geschwindigkeit des Punktes A zur Zeit T_0 diejenige zu verstehen haben, mit welcher er in dem auf T_0 nächstfolgenden oder in dem nächstvorhergehenden Zeit-

elemente geradlinig und gleichförmig fortgeht. Ist also $T_0 T_1$ solch ein Zeitelement, so ist $A_0 A_1$ die Richtung der Geschwindigkeit von A znr Zeit T_0, und ihre Grösse $= \frac{A_0 A_1}{T_0 T_1}$ (§. 8.), oder auch $= m \, . \, A_0 A_1$, wenn m die (unendlich grosse) Anzahl der in der Zeiteinheit enthaltenen und dem $T_0 T_1$ gleichen Elemente bedeutet.

Mit andern Worten und schärfer: Je näher einem bestimmten Zeitpunkte T_0 ein anderer T_1 genommen wird, und je näher damit der Ort A_1 dem A_0 zu liegen kommt, desto mehr und über alle Grenzen hinaus nähert sich der Quotient $\frac{A_0 A_1}{T_0 T_1}$ einem bestimmten Werthe und die Gerade $A_0 A_1$ einer bestimmten Richtung. Es sind dies die Grösse und die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes A zur Zeit T_0. — Zugleich sieht man daraus, dass die Richtung der Geschwindigkeit einerlei mit der Richtung der in A_0 an die Bahn von A gelegten geradlinigen Tangente ist.

Um die Bestimmung der Grösse der Geschwindigkeit durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir eine geradlinige Bewegung betrachten, bei welcher der von einem gewissen Zeitpnnkte Θ bis zu irgend einem andern T_0 zurückgelegte Weg s stets dem Quadrate der seit Θ verflossenen Zeit ΘT_0, welche t heisse, proportional ist, also $s = at^2$, wo daher a den Weg bezeichnet, der in der ersten anf Θ folgenden Zeiteinheit beschrieben wird. Setzen wir nun zur Abkürzung den Zeitraum $T_0 T_1 = \tau$, so ist der während ΘT_1 oder $t + \tau$ beschriebene Weg $= a \; (t + \tau)^2$, folglich der während $T_0 T_1$ oder τ beschriebene $A_0 A_1 = a \, (t + \tau)^2 - at^2 = 2at\tau + a\tau^2$. Die Division desselben durch τ giebt $2at + a\tau$, als die Geschwindigkeit des Punktes, wenn er den Weg $A_0 A_1$ während τ gleichförmig beschrieben hätte. Ihr Werth nähert sich desto mehr dem $2at$, je kleiner der Zeittheil τ genommen wird, und geht für ein unendlich kleines oder verschwindendes τ in $2at$ selbst über, welches daher die Geschwindigkeit im Zeitpunkte T_0 ist. Sie ist hiernach der seit Θ verflossenen Zeit proportional, also in Θ selbst $= 0$, und am Ende der ersten Zeiteinheit

nach Θ, $= 2a$, d. h. doppelt so gross, als der während derselben beschriebene Weg.

Man nennt eine solche Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit im Verhältnisse der Zeit, also in gleichen Zeiten um gleichviel (in jeder Zeiteinheit um $2a$) zunimmt, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Jeder frei fallende Körper zeigt eine solche. Seine Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde nach dem Anfange des Falls ist = 30 paris. Fuss (nahe wenigstens*)), am Ende der zweiten = 60 Fuss, am Ende der dritten = 90 Fuss, etc. Der Fallraum aber in der ersten Secunde beträgt $\frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ Fuss, der Fallraum in den zwei ersten Secunden $2 \cdot 2 \cdot 15 = 60$ Fuss, in den drei ersten $3 \cdot 3 \cdot 15 = 135$ Fuss, u. s. w.

Zusatz. Auf ganz ähnliche Weise, nach welcher wir bei der durch die Formel $s = at^2$ dargestellten Bewegung verfuhren, lässt sich auch in jedem andern Falle die Geschwindigkeit finden, wenn das Stück s der von einem Punkte A beschriebenen Bahn, welches sich von einem beliebig darin gewählten Anfangspunkte bis zu dem Orte erstreckt, wo sich A am Ende der Zeit t befindet, als eine analytische Function von t gegeben ist.

Die einfachste Function von t ist $a + bt$. Setzen wir $s = a + bt$, so wächst s um $b\tau$, wenn t um τ zunimmt. Die Geschwindigkeit ist daher $= b$, also constant; die andere Constante a ist der Werth von s für $t = 0$.

Bei der zusammengesetzteren, durch $s = a + bt + ct^2$ ausgedrückten, Bewegung ist das Wachsthum von s während des auf t folgenden τ, $= b\tau + 2ct\tau + c\tau^2 = (b + 2ct + c\tau)\,\tau$, mithin die Geschwindigkeit = dem Grenzwerthe von $b + 2ct + c\tau$ für ein verschwindendes τ, d. i. $= b + 2ct$. Hier nimmt also die Geschwindigkeit der Zeit proportional zu, in jeder

*) Genauer ist diese Geschwindigkeit im luftleeren Raume unter dem Aequator = 30,108, unter den Polen = 30,264 paris. Fuss. Allgemeine Uebersicht des Sonnensystems in Schumacher's Jahrbuch für 1837, Seite 97. Aus diesem Aufsatze Hansen's sind auch die meisten der später folgenden numerischen Angaben genommen.

Zeiteinheit um $2c$, wie oben; ihr Werth für $t = 0$ ist $= b$, und die Constante a ist der Werth von s zu derselben Zeit.

Eben so findet sich für $s = a + bt + ct^2 + dt^3$ die Geschwindigkeit $= b + 2ct + 3dt^2$; u. s. w.

Anmerkung. Wie man leicht im Voraus übersieht, muss sich die Form $s = a + bt + ct^2$ auf die einfachere $s_1 = ct_1{}^2$ reduciren lassen, wo s_1 und t_1 gleichfalls den Raum und die Zeit, nur von andern Punkten angefangen, bedeuten; t_1 nämlich von dem Zeitpunkte, wo die Geschwindigkeit, $= b + 2ct$, null ist, und s_1 von dem Punkte des Raums, wo sich der bewegende Punkt für $t_1 = 0$ befindet. In der That geht die erstere Form in die letztere über, wenn man

$$s = s_1 + a - \frac{b^2}{4c} \text{ und } t = t_1 - \frac{b}{2c} \text{ setzt.}$$

§. 11.

Nicht bloss bei der Bewegung eines Punktes, sondern überhaupt bei jeder mit der Zeit sich ändernden und daher als Function von t darstellbaren Grösse x kann nach der Geschwindigkeit ihrer Aenderung gefragt werden. Aendert sich x gleichförmig, d. h. in gleichen Zeiten um gleichviel, so wird man unter der Geschwindigkeit von x die Aenderung in der Zeiteinheit zu verstehen haben und ihren constanten Werth finden, wenn man die irgend einem Zeitraume $T_0 T_1$, $= \Delta t$, zugehörige Aenderung von x, $= \Delta x$, durch Δt dividirt. Aendert sich x ungleichförmig, so hat dieser Quotient nach verschiedener Annahme der Zeitpunkte T_0 und T_1 verschiedene Werthe. Er wird sich aber, wenn man T_0 unverändert behält und T_1 dem T_0 immer näher, also Δt immer kleiner annimmt, immer mehr einem von Δt unabhängigen Grenzwerthe nähern, und dieser als die Geschwindigkeit zur Zeit T_0 zu betrachten seyn.

Bedeuten $x, y, z, \ldots$ die Werthe mehrerer veränderlichen Grössen zur Zeit t, und $x', y', z', \ldots$ die gleichzeitigen Werthe ihrer Geschwindigkeiten. Sind nun $x, y, z, \ldots$ durch eine für jeden Werth von t bestehende algebraische Gleichung mit einander verbunden, so kann daraus stets ohne

Schwierigkeit eine Gleichung zwischen $x', y', z', \ldots$ hergeleitet werden. Seyen zu dem Ende $\Delta x, \Delta y, \ldots$ die Incremente von $x, y, \ldots$ wenn t um Δt wächst. Die gegebene Gleichung wird daher noch bestehen, wenn man darin für $x, y, \ldots$ resp. $x + \Delta x$, $y + \Delta y, \ldots$ setzt und damit von der Zeit t zur Zeit $t + \Delta t$ übergeht. Von der solchergestalt geänderten Gleichung ziehe man die ursprüngliche ab und dividire die restirende durch Δt. Indem man nun das Increment Δt über alle Grenzen klein werdend annimmt und deshalb alle mit dieser Annahme verschwindenden Glieder weglässt und für $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \ldots$ resp. $x', y', \ldots$ schreibt, hat man die Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten gefunden.

Beispiele. Sei zwischen $x, y, z, \ldots$ die Gleichung

$$(1)\quad z = a + bx + cy + \ldots$$

gegeben. Hieraus folgen der Reihe nach die Gleichungen

$$z + \Delta z = a + b(x + \Delta x) + c(y + \Delta y) + \ldots,$$

$$\Delta z = b\Delta x + c\Delta y + \ldots,\quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = b\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + c\,\frac{\Delta y}{\Delta t} + \ldots,$$

also zuletzt $(1^*) \ldots z' = bx' + cy' + \ldots$

Eben so findet sich aus der Gleichung

$$(2)\quad z = xy,$$

nachdem man die gedachten Operationen vorgenommen hat:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = x\,\frac{\Delta y}{\Delta t} + y\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}\,.\,\Delta y.$$

Lässt man nun Δt unendlich klein werden, so verschwindet das letzte Glied gegen die übrigen, und es kommt:

$$(2^*)\quad z' = xy' + yx';$$

oder, wie wir dieses Resultat noch ausdrücken können: Sind x' und y' die Geschwindigkeiten, mit denen sich x und y ändern, oder kurz die Geschwindigkeiten von x und y, so ist $xy' + yx'$ die Geschwindigkeit des Products xy.

Setzt man in (2) $y = x$, so wird $z = x^2$ und (2^*) geht über in $z' = 2xx'$, d. h. $2xx'$ ist die Geschwindigkeit von x^2.

Ist $1 = xy$ die vorgegebene Gleichung, also das vorige z constant, $= 1$, so wird $z' = 0$, mithin $xy' + yx' = 0$

und $y' = -\frac{yx'}{x} = -\frac{x'}{x^2}$, wegen $y = \frac{1}{x}$; d. h. $-\frac{x'}{x^2}$ ist die Geschwindigkeit von $\frac{1}{x}$.

Die weitere Entwickelung dieses Gegenstandes gehört, wie die meisten meiner Leser schon wissen werden, in das Gebiet der Differentialrechnung. Newton, welcher diese Wissenschaft ähnlicherweise, wie hier, auf die Begriffe von Zeit und Bewegung gründete, nannte die Function von t, welche die Geschwindigkeit einer andern Function von t ausdrückt, die Fluxion der andern; die neueren Geometer nennen sie schlechthin die ans der andern abgeleitete Function.

§. 12.

Lehrsatz. *Ist die Bewegung eines Punktes P aus den Bewegungen mehrerer anderer Punkte A, B, ... zusammengesetzt, so ist auch in jedem Zeitpunkte T_0 die Geschwindigkeit von P aus den Geschwindigkeiten von A, B, ... zusammengesetzt.*

Beweis. Nach §. 6. ist die gerade Linie P_0P_1 aus den geraden A_0A_1, B_0B_1, ..., folglich auch $m\,.\,P_0P_1$ aus $m\,.\,A_0A_1$, $m\,.\,B_0B_1$, ... (§. 2. *e.*) zusammengesetzt. Es ist aber, wenn T_0T_1 als Zeitelement genommen wird, und m, wie in §. 10., die Anzahl der in der Zeiteinheit enthaltenen Elemente bedeutet, $m\,.\,A_0A_1 \equiv$ der Geschwindigkeit von A zur Zeit T_0, $m\,.\,B_0B_1 \equiv$ der Geschwindigkeit von B zu derselben Zeit, etc.; folglich u. s. w.

Folgerungen. *a.* Wenn die Geschwindigkeiten von A, B, ... im Verlauf der Zeit weder ihre Richtung noch ihre Grösse ändern, so wird auch die Geschwindigkeit von P eine constante Richtung und Grösse haben, d. h.: *Bewegen sich mehrere Punkte geradlinig und gleichförmig, so ist auch die aus ihnen zusammengesetzte Bewegung geradlinig und gleichförmig.*

b. Wird eine in einer Ebene vor sich gehende Bewegung nach zwei in der Ebene sich schneidenden Geraden a und b zerlegt, so finden sich die Geschwindigkeiten der Bewegungen in a und b, wenn man die Geschwindigkeit der erstern Be-

wegung nach denselben Geraden zerlegt. — Denn nach dem obigen Satze müssen die Geschwindigkeiten der zwei durch Zerlegung erhaltenen Bewegungen, wenn sie zusammengesetzt werden, die Geschwindigkeit der ursprünglichen Bewegung wieder geben. Letztere Geschwindigkeit muss folglich in die zwei erstern zerlegt werden können. Eine gerade Linie in der Ebene, und folglich auch die durch sie ausgedrückte Geschwindigkeit, kann aber nach den zwei Geraden a und b der Ebene nur auf eine Weise zerlegt werden (§. 3.).

Eben so zeigt sich, dass auch bei Zerlegung einer Bewegung nach einer Ebene und einer sie schneidenden Geraden, oder nach drei sich in einem Punkte schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Geraden, die Geschwindigkeiten der somit entstehenden Bewegungen gefunden werden, wenn man die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung nach derselben Ebene und Geraden, oder nach denselben drei Geraden zerlegt.

c. Da die Zerlegung einer Bewegung sowohl, als einer geraden Linie, in jedem der gedachten drei Fälle durch Projection bewerkstelligt werden kann (§§. 3 und 7.), so lässt sich die eben gemachte Folgerung auch also aussprechen: Wird eine Bewegung auf eine Gerade oder eine Ebene projicirt, so findet sich die Geschwindigkeit der projicirten Bewegung, wenn man die Geschwindigkeit der ursprünglichen Bewegung auf dieselbe Gerade oder Ebene projicirt; oder kurz: *die Geschwindigkeit der projicirten Bewegung ist der Projection der Geschwindigkeit der ursprünglichen Bewegung gleich.*

Dasselbe erhellet unmittelbar und noch einfacher folgendergestalt: Ist der Punkt A die Projection des Punktes P, so ist auch für je zwei Zeitpunkte T_0 und T_1, A_0A_1 von P_0P_1 und $m \,.\, A_0A_1$ von $m \,.\, P_0P_1$ die Projection. Es sind aber letztere Linien, wenn T_0T_1 als Zeitelement und m in der obigen Bedeutung genommen wird, $\equiv$ den Geschwindigkeiten von A und P zur Zeit T_0; folglich u. s. w.

§. 13.

Lehrsatz. Wenn von zwei sich bewegenden Punkten A und B die Geschwindigkeiten (sowohl der Richtung,

als der Grösse nach (§. 9.)*) stets einander gleich sind, so sind die Bewegungen selbst einander gleich.*

Beweis. Scien T_0T_1, T_1T_2, ... mehrere auf einander folgende Zeitelemente, so sind die Geschwindigkeiten von A und B während des ersten $\equiv \frac{A_0A_1}{T_0T_1}$ nnd $\frac{B_0B_1}{T_0T_1}$. Da diese einander gleich und gleichgerichtet sein sollen, so müssen A_0A_1 und B_0B_1 selbst einander gleich sein und einerlei Richtung haben, also $A_0A_1 \equiv B_0B_1$, folglich $A_0B_0 \equiv A_1B_1$. Eben so wird bewiesen, dass $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, u. s. w. Die Linie AB bleibt sich daher stets gleich und parallel, und die Bewegungen von A und B sind folglich einander gleich (§. 4.).

Folgerung. Haben zwei Punkte stets einander gleiche Geschwindigkeiten und fallen sie in irgend einem Zeitpunkte zusammen, so werden sie dies auch in jedem andern (ebds.).

Beispiel. Bewege sich A in einer Geraden nach dem Gesetz, dass (1) ... $s = a + bt + ct^2$. Der Punkt B bewege sich in derselben Geraden und sei für $t = 0$ vom Anfangspunkte der Geraden um a entfernt; seine Geschwindigkeit in demselben Zeitpunkte sei $= b$ und wachse in jeder Zeiteinheit um $2c$. Nach dem, was über die durch (1) ausgedrückte Bewegung in §. 10. gesagt worden, fallen daher A und B für $t = 0$ zusammen, haben für $t = 0$ gleiche Geschwindigkeiten, und so auch zu jeder andern Zeit, weil auch die Geschwindigkeit von A in jeder Zeiteinheit um $2c$ wächst. Die Bewegungen von A und B sind mithin identisch, und wir folgern hieraus umgekehrt: Bewegt sich ein Punkt in einer Geraden so, dass er für $t = 0$ vom Anfangspunkte der Geraden um a entfernt ist und eine Geschwindigkeit $= b$ hat, und dass letztere in jeder Zeiteinheit um $2c$ wächst, so ist seine Entfernung vom Anfangspunkte zur Zeit t, $= a + bt + ct^2$.

§. 14.

Nach der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung sind die einfachsten Bewegungen die geradlinige, bei welcher sich die Grösse der Geschwindigkeit proportional der Zeit ändert, und die gleichförmige, bei welcher sich die Richtung

der Geschwindigkeit proportional der Zeit, in gleichen Zeiten um gleiche Winkel, ändert. Erstere Bewegung haben wir bereits in §§. 10. und 13. betrachtet; letztere, oder die gleichförmige Kreisbewegung, soll uns zur Erläuterung dessen, was in §. 12. über die Projection einer Bewegung gesagt worden, dienen.

Bewege sich demnach P (Fig. 10.) um den festen Punkt O in einem Kreise, dessen Halbmesser $OP = a$, von der Rechten nach der Linken mit der constanten Geschwindigkeit c. Ist die Umlaufszeit im Kreise, $= 2U$, gegeben, so findet sich $c = \frac{\pi a}{U}$, wo π die Ludolph'sche Zahl bezeichnet.

Man projicire nun diese Bewegung rechtwinklig auf einen Durchmesser MN des Kreises und nenne A den Punkt, welcher die projicirte Bewegung hat. A ist hiernach der Fusspunkt des von P auf MN gefällten Perpendikels, bewegt sich zwischen M und N hin und her und gebraucht zu jedem Hin- oder Hergange die halbe Umlaufszeit U.

Die Richtung, nach welcher sich P bewegt, ist die Richtung der an den Kreis in P nach der Linken hin gezogenen (auf OP perpendikularen) Tangente. Setzt man daher nach derselben Seite hin eine Linie $OH = c$ perpendikular auf OP und fällt von H auf MN das Perpendikel HF, so wird durch OH die Geschwindigkeit von P ihrer Grösse und Richtung nach dargestellt, durch OF aber, als die Projection von OH auf MN, die Geschwindigkeit von A. Weil die Dreiecke OPA und HOF gleichwinklig sind, so verhält sich $AP : OF = OP : OH = a : c$. Die Geschwindigkeit von A ist hiernach $= AP \cdot c : a$, also dem Perpendikel AP proportional, und daher null, wenn A in M oder in N ist, am grössten aber, $= c$, wenn A auf der Mitte O seines Wegs ist.

Die Bewegung und die Geschwindigkeit von A lassen sich auch leicht durch trigonometrische Functionen ausdrücken. Zu dem Ende werde die Zahl $\frac{c}{a}$, $= \frac{\pi}{U}$, kurz mit n bezeichnet. Sie ist der in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Bogen, um welchen P in der Zeiteinheit fortgeht. Nimmt man daher den Winkel ($= 57^0\,17'\,44'', 8 = 206264'', 8$),

der von einem dem Halbmesser gleichen Bogen gemessen wird, zur Maasseinheit der Winkel, so bedeutet dieselbe Zahl n auch den Winkel, um welchen sich der Halbmesser OP in der Zeiteinheit dreht, und wird deshalb die Winkelgeschwindigkeit von P genannt. Indem man nun alle Winkel von der Rechten nach der Linken rechnet, sei α der Winkel, den der sich drehende Halbmesser OP mit dem festen OM zur Zeit $t = 0$ macht; am Ende von t ist daher dieser Winkel $= \alpha + nt$, und zu eben der Zeit $OA = OP$. $\cos MOP = a \cos(\alpha + nt)$ und $OF = OH \cos MOH$, oder, weil $OH = c = na$ und $MOH = MOP + POH = \alpha + nt + 90^0$ ist, $OF = -na \sin(\alpha + nt)$. Wenn man daher für die Zeit t den Werth von $OA = x$ und die Geschwindigkeit von $A, = x'$ setzt und die Richtung von N nach M für die positive nimmt, so hat man die Formeln:

I. $x = a \cos(\alpha + nt)$ und $x' = -na \sin(\alpha + nt)$,

wodurch sich für jeden Zeitpunkt der Ort des Punktes A und seine Geschwindigkeit bestimmen lassen. Je nachdem sich dabei die Werthe von x und x' positiv oder negativ finden, sind die Richtung OA und die der Geschwindigkeit von A mit der Richtung NM einerlei oder ihr entgegengesetzt.

Projicirt man gleicherweise die Bewegung von P auf den Durchmesser RS, welcher den vorigen MN rechtwinklig schneidet, und fällt deshalb von P und H auf RS die Perpendikel PB und HG, so ist B der Punkt, welcher die projicirte Bewegung hat, und OG seine Geschwindigkeit. Nimmt man ferner diejenige Richtung des neuen Durchmessers, welche mit NM einen Winkel von 90^0, nicht von 270^0, macht, also die Richtung SR, für die positive, so ist $OB = OP \cos POR$ und $OG = OH \cos ROH$, oder, weil $POR = 90^0 - MOP$ und $ROH = MOP = \alpha + nt$ ist, und wenn man, auf analoge Weise mit dem Vorigen, $OB = y$ und $OG = y'$ setzt:

II. $y = a \sin(\alpha + nt)$ und $y' = na \cos(\alpha + nt)$,

Formeln, welche in die vorigen übergehen, wenn man y und y' in x und x' verwandelt und α um 90^0 wachsen lässt.

Man bemerke nur noch, dass durch die zwei rechtwinkligen Projectionen der Bewegung von P auf zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade sie zugleich nach diesen zwei Geraden zerlegt worden ist.

Zusatz. Ganz ähnliche Formeln finden statt, wenn P sich im Kreise nicht gleichförmig bewegt. Ist überhaupt l die Function von t, welche den Werth des Winkels MOP am Ende der Zeit t angiebt, und l' die Geschwindigkeit dieser Function (§. 11.), so ist zu eben der Zeit der Bogen $MP = al$, also die Geschwindigkeit, mit der er sich ändert, oder die Geschwindigkeit von P, $= al'$, und die in P an den Kreis gezogene Tangente ist ihre Richtung. Macht man daher, wie vorhin, OH parallel mit dieser Richtung und $= al'$, und projicirt P sowohl als H rechtwinklig auf MN und RS, so sind OF und OG die Geschwindigkeiten von A und B, und man erhält für die Bewegung dieser Punkte, wenn man wiederum $OA = x$ und $OB = y$ und ihre Geschwindigkeiten $= x'$ und y' setzt:

$$x = a \cos l,\ x' = -\ al' \sin l,$$
$$y = a \sin l,\ y' = \quad al' \cos l.$$

Ziehen wir hieraus noch den Schluss, dass überhaupt, wenn l eine veränderliche Zahl und l' ihre Geschwindigkeit bezeichnet, die Geschwindigkeiten der trigonometrischen Functionen $\cos l$ und $\sin l$ resp. $= -\ l' \sin l$ und $l' \cos l$ sind, — zwei Resultate, von denen das eine in das andere übergeht, wenn man l in $90^0 - l$ und damit l' in $-\ l'$ verwandelt.

Zweites Kapitel.

Von den Wirkungen der Kräfte.

§. 15.

Unsere bisher rein mathematischen Untersuchungen über die Bewegung wollen wir jetzt auf die uns umgebende Körperwelt anwenden und statt der sich bewegenden mathematischen Punkte die Bewegung physischer Körper in Betrachtung ziehen, die wir aber, vor der Hand wenigstens, gleichfalls nur als Punkte, oder doch so klein annehmen wollen, dass ihre Dimensionen ganz ausser Acht gelassen werden können.

Hier tritt uns nun sogleich die der reinen Mathematik fremde Relation zwischen Ursache und Wirkung entgegen. Es ist nämlich nicht möglich, dass ein physischer Körper, welcher in Ruhe ist, ohne äussere Ursache sich zu bewegen anfängt, und eben so wenig, dass ein sich bewegender Körper ohne äussere Ursache die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung ändert. Ohne eine fremde Einwirkung wird ein ruhender Körper fortwährend in Ruhe bleiben, und ein sich bewegender ohne Aufhören in gerader Linie mit unveränderter Geschwindigkeit fortgehen. Diese allgemeine Eigenschaft der Körper, der zufolge sie ihren Zustand, er bestehe in Ruhe oder Bewegung, nicht selbstthätig zu ändern im Stande sind, wird die Trägheit der Körper genannt.

Welches die den Zustand der Körper ändernden Ursachen sind, untersuchen wir hier nicht näher, sondern ziehen bloss die Wirkungen derselben in Betracht und legen uns daher Fragen von etwa folgender Art zur Beantwortung vor: Es sind zwei oder mehrere Bewegungen gegeben; welches wird die Bewegung eines Körpers sein, wenn die Ursachen, welche einzeln ihm die gegebenen Bewegungen mittheilen, gleichzeitig auf ihn einwirken? — Oder: ein Körper, der sich bisher geradlinig und gleichförmig bewegte, ändert plötzlich seine Richtung und seine Geschwindigkeit;

nach welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit wird er sich bewegen, wenn die Ursache, welche jene Aenderung hervorbrachte, auf denselben in Ruhe sich befindenden, oder sich irgendwie anders bewegenden, Körper wirkt?

Es leuchtet ein, dass die Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben ohne die Zuhülfenahme eines neuen Grundsatzes nicht möglich ist, eines Grundsatzes, der aus der Erfahrung geschöpft ist und die Lösung der einfachsten unter diesen Aufgaben in sich schliesst. Die Entwickelung dieses Grundsatzes und seiner unmittelbaren Folgen wird der Gegenstand der nächsten §§. sein.

§. 16.

Die Ursache, welche einen ruhenden Körper in Bewegung setzt und die Richtung und Geschwindigkeit eines sich bewegenden zu ändern vermag, nennt man **Kraft**. Die Richtung, nach welcher ein vorher ruhender Körper, durch eine Kraft getrieben, sich zu bewegen anfängt, heisst die **Richtung** der Kraft.

Zwei Kräfte heissen einander gleich, wenn sie, nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirkend, mit einander im Gleichgewichte sind. Von zwei Kräften nennt man die eine das *n* fache der andern, wenn *n* der andern gleiche und nach einerlei Richtung auf einen Körper wirkende Kräfte der erstern Kraft, wenn diese nach entgegengesetzter Richtung am Körper angebracht wird, das Gleichgewicht halten.

Hiernach kann man das Verhältniss zwischen Kräften immer durch Zahlen, so nahe als man will, ausdrücken; denn man wird von zwei Kräften sagen, dass sie sich wie die Zahlen *m* und *n* verhalten, wenn es eine dritte Kraft giebt, von welcher die eine jener beiden das *m* fache, die andere das *n* fache ist. Kräfte können daher sehr passend auch durch gerade Linien ausgedrückt werden, welche die Richtungen der Kräfte haben, und deren Längen den Zahlenwerthen der Kräfte proportional sind. Eine Kraft wird man hiernach aus zwei oder mehrern andern Kräften **zusammengesetzt** nennen, wenn die Linie, welche die erstere aus-

drückt, aus den die letztern darstellenden Linien zusammengesetzt ist.

Dieses vorausgeschickt, zeigt nun die Statik, dass, wenn Kräfte in beliebiger Anzahl sich an einem Körper *A* das Gleichgewicht halten, man, ohne das Gleichgewicht aufzuheben, statt zweier oder mehrerer derselben die aus ihnen zusammengesetzte substituiren kann; — also statt zweier Kräfte, welche nach einerlei, oder entgegengesetzter Richtung wirken, eine Kraft, welche im erstern Falle der Summe, im letztern der Differenz jener zwei Kräfte gleich ist und die Richtung der grösseren hat. Machen aber zwei der auf *A* wirkenden Kräfte, *AB* und *AC* (Fig. 11.), einen Winkel mit einander, so ergänze man denselben zu einem Parallelogramm *BACD*, und es wird die aus *A* zu ziehende Diagonale *AD* des letztern die statt *AB* und *AC* zu setzende Kraft darstellen. Denn es ist *AD* aus *AB* und *BD*, folglich auch, weil $BD \equiv AC$, ans *AB* und *AC* zusammengesetzt. — Noch folgt hieraus, dass eine Kraft *AE*, welche mit *AB* und *AC* das Gleichgewicht halten soll, der *AD* gleich und entgegengesetzt sein muss; und überhaupt: Sollen mehrere auf einen Körper wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so muss jede derselben der aus den jedesmal übrigen zusammengesetzten gleich und entgegengesetzt sein, oder, was dasselbe ist, die Zusammensetzung aller Kräfte muss Null geben.

Sind mehrere auf einen Körper *A* wirkende Kräfte nicht im Gleichgewichte, sondern bewegen sie ihn, und sind *AB*, *AC* irgend zwei derselben, so füge man noch die aus letztern zwei zusammengesetzte Kraft *AD* und die dieser gleiche und entgegengesetzte *AE* hinzu. Weil *AD* und *AE* für sich im Gleichgewichte sind, so wird durch diese Hinzufügung die Bewegung von *A* nicht geändert. Eben so wenig aber wird dieses geschehen, wenn man *AB*, *AC* nnd *AE*, als drei für sich im Gleichgewichte stehende Kräfte, entfernt, so dass *AD* anstatt der anfänglichen *AB* und *AC* znrückbleibt. Sowie vorhin das Gleichgewicht, bleibt daher auch die von mehrern Kräften hervorgebrachte Bewegung eines Körpers ungeändert, wenn man statt zweier, oder statt dreier, etc.

oder auch statt aller, die aus ihnen zusammengesetzte Kraft substituirt.

§. 17.

Jede Kraft wirkt auf einen Körper längere oder kürzere Zeit ununterbrochen fort. Zur Erleichterung der Untersuchung wollen wir uns aber fürs Erste jede Kraft nur augenblicklich oder stossweise wirkend denken. Ein vorher ruhender Körper wird daher von dem Zeitpunkte an, in welchem er einen solchen Stoss empfängt, nach der Richtung desselben mit einer von dessen Stärke abhängenden constanten Geschwindigkeit fortgehen, und dieses so lange, bis ein anderer Stoss seine Bewegung ändert, oder ganz aufhebt.

Ob nun die einem Körper durch einen Stoss ertheilte Geschwindigkeit dem Stosse geradezu proportional ist, so dass z. B. ein Stoss, doppelt so gross als ein anderer, oder zwei dem andern gleiche und nach einerlei Richtung erfolgende Stösse, eine doppelt so grosse Geschwindigkeit als der andere hervorbringen, oder ob die Geschwindigkeit nach irgend einem andern weniger einfachen Gesetze von der Stärke des Stosses abhängt, darüber können wir nicht a priori, sondern erst durch Erfahrung entscheiden. Diese aber stimmt in der That mit allen Resultaten überein, welche sich theoretisch unter Annahme jenes einfachsten Verhältnisses zwischen Stoss und Geschwindigkeit ergeben. Wir stellen daher, als wahres Naturgesetz, und zugleich als das nach §. 15. noch nöthige Axiom, den Satz auf:

Die von verschiedenen Kräften einem Körper ertheilten Geschwindigkeiten sind den Kräften selbst proportional.

§. 18.

Folgerungen. *a*. Empfängt ein ruhender Körper gleichzeitig mehrere Stösse *a*, *b*, *c*, ..., sei es nach einerlei oder verschiedenen Richtungen, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher er sich zu bewegen anfängt, aus den Geschwindigkeiten, welche ihm die Stösse einzeln ertheilen,

zusammengesetzt. Denn die Stösse a, b, c, ... sind (§. 16. zu Ende) gleichwirkend mit einem einzigen aus ihnen zusammengesetzten Stosse x, und dem Grundsatze zufolge sind die von a, b, c, ... und x erzeugten Geschwindigkeiten den a, b, c, ... und x selbst proportional; folglich u. s. w.

b. Empfängt ein anfangs ruhender Körper nicht gleichzeitig, sondern in auf einander folgenden Zeitpunkten T_0, T_1, T_2, ... Stösse, welche einzeln dem ruhenden die (ihrer Grösse und Richtung nach gegebenen) Geschwindigkeiten c_0, c_1, c_2, ... resp. ertheilen würden, so wird er sich während des Zeitraumes T_0T_1 mit der Geschwindigkeit c_0 bewegen. Für seine fernere Bewegung ist es nun offenbar gleichgültig, wie lange vor T_1 er die Geschwindigkeit c_0 gehabt hat, und man kann daher in dieser Hinsicht auch annehmen, dass er erst zur Zeit T_1 diese Geschwindigkeit erhält. Hiermit verbindet sich die ihm zu derselben Zeit mitgetheilte Geschwindigkeit c_1, und er bewegt sich daher während T_1T_2 mit der aus c_0 und c_1 zusammengesetzten Geschwindigkeit. Eben so ist seine Geschwindigkeit während T_2T_3 aus c_0, c_1, c_2 zusammengesetzt, u. s. w. Die Bahn, die der Körper somit beschreibt, ist im Allgemeinen eine gebrochene gerade Linie, und nur dann eine einfache Gerade, wenn die Stösse nach einerlei Richtung, oder auch zum Theil nach entgegengesetzter Richtung, geschehen. Die Geschwindigkeiten während T_0T_1, T_1T_2, T_2T_3, etc. sind in diesem Falle c_0, c_0+c_1, $c_0+c_1+c_2$, ..., wo diejenigen c, welche von entgegengesetzten Stössen hervorgebracht werden, mit negativen Zeichen zu nehmen sind. — Haben alle Stösse nicht nur einerlei Richtung, sondern auch einerlei Stärke, so ist $c_0=c_1=c_2=$ etc., und die successiven Geschwindigkeiten sind $=c_0$, $2c_0$, $3c_0$, $4c_0$, etc.

§. 19.

Suchen wir jetzt die umgekehrte Aufgabe zu lösen und den Stoss zu bestimmen, welcher erfolgen muss, wenn ein anfänglich in der Geraden MB (Fig. 12.) mit einer Geschwindigkeit $=AB$ sich bewegender Körper von B aus in der

Richtung BN mit einer Geschwindigkeit $= BC$ fortgeht. Nach dem Vorigen muss der gesuchte Stoss dem Körper, wenn er in B ist, eine Geschwindigkeit beibringen, welche, mit der Geschwindigkeit AB zusammengesetzt, die BC giebt. Man mache deshalb in der Verlängerung von MB das Stück $BD = AB$, und es wird die Linie DC, weil sie, mit AB, $\equiv BD$, zusammengesetzt, die BC giebt, die von dem Stoss zu erzeugende Geschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach darstellen; oder: man mache $AE \equiv BC$, so ist BC aus AB und BE zusammengesetzt, und daher BE ($\equiv DC$) die gesuchte Geschwindigkeit.

Die letztere Construction lässt sich auch durch die Vorstellung begründen, der Körper erhalte, in B angelangt, einen Stoss BA, welcher die anfängliche Geschwindigkeit aufhebt, und einen Stoss BC, welcher ihm die nachherige ertheilt. Der gesuchte Stoss wird folglich aus diesen zweien zusammengesetzt und mithin die Diagonale BE des zu einem Parallelogramm ergänzten Winkels ABC sein.

In dem besondern Falle, wenn MB und BN eine Gerade ausmachen, liegen auch D und E in dieser Geraden, und es ist die Geschwindigkeit, welche der Stoss in B dem Körper beibringt, $= DC = BE = BC - AB$, und nach N oder M gerichtet, jenachdem BC oder AB die grössere Geschwindigkeit ist.

§. 20.

Bei den in der Folge zu betrachtenden Bewegungen ändern sich die Richtung und die Geschwindigkeit nicht, wie vorhin, mit einem Male, sondern stetig. Wie aber schon bemerkt worden, kann man auch die Aenderungen einer stetigen Bewegung als plötzlich eintretend sich vorstellen, wenn man nur die Zeitpunkte ihres Eintritts unendlich nahe auf einander folgend annimmt. Wir denken uns demnach die Zeit in einander gleiche Elemente $T_0 T_1$, $T_1 T_2$, $T_2 T_3$, ... getheilt, deren stets eine und dieselbe Anzahl, $= m$, auf die Zeiteinheit gehen, und substituiren für die wirkliche Bewegung eines Körpers A eine andere, bei welcher A in den Zeitpunkten T_0, T_1, T_2, ... dieselben Oerter A_0, A_1, A_2, ...

(Fig. 13.), wie bei der wirklichen, einnimmt, von jedem derselben aber zum nächstfolgenden sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Hiernach sind die Geschwindigkeiten von A während $T_0 T_1$, $T_1 T_2$, ... $\equiv m . A_0 A_1$, $m . A_1 A_2$, ... Man mache $A_0 B_1 \equiv A_1 A_2$, $A_1 B_2 \equiv A_2 A_3$, $A_2 B_3 \equiv A_3 A_4$, etc. so ist (vor. §.) $m . A_1 B_1$ die Geschwindigkeit, die dem Körper in A_1, also zur Zeit T_1, durch einen Stoss ertheilt werden muss, damit sich seine vorhergeheude Geschwindigkeit $m . A_0 A_1$ in die nachfolgende $m . A_1 A_2$ umwandelt. Eben so muss der Körper in A_2, A_3, ... Stösse erhalten, die ihm die Geschwindigkeiten $m . A_2 B_2$, $m . A_3 B_3$, ... beibringen.

Nehmen wir nun zuförderst an, dass alle diese Geschwindigkeiten, und folglich auch die zu Anfang jedes der einander gleichen Zeitelemente erfolgenden Stösse, einander gleich und gleichgerichtet sind. Man sagt alsdann, dass auf den Körper nach derselben Richtung eine constante beschleunigende Kraft wirke. Der Körper wird dann, wenn er anfangs in Ruhe war, nach der Richtung der Kraft geradlinig fortgehen, und seine Geschwindigkeit während des zweiten, dritten ... $m$ten Zeitelements wird $= 2\gamma$, 3γ, ... $m\gamma$ sein, wenn γ die Geschwindigkeit während des ersten Elements oder diejenige bedeutet, welche ein einzelner Stoss ertheilt (§. 18.) Die Geschwindigkeit wird mithin der Zeit proportional, in jeder Zeiteinheit um $m\gamma$, wachsen, und die Bewegung des Körpers wird eine gleichförmig beschleunigte sein (§. 10.).

Zwei constante beschleunigende Kräfte haben wir einander gleich zu nennen, wenn jeder Stoss der einen jedem Stosse der andern gleich ist. Der anfangs ruhende Körper wird hiernach unter dem Einflusse der einen dieselbe gleichförmig beschleunigte Bewegung, wie unter dem Einflusse der andern, annehmen, d. h. seine Geschwindigkeit wird in jeder Zeiteinheit das einemal um eben so viel, als das anderemal, wachsen.

Eine constante beschleunigende Kraft P ist nach §. 16. das $p$fache einer andern Kraft Q derselben Art zu nennen, wenn p der andern gleiche und nach einerlei Richtung wirkende Kräfte dieselbe Bewegung, wie P allein, hervorbringen.

Wirken aber die p Kräfte zusammen, so empfängt der Körper zu Anfang jedes Zeitelements p Stösse, welche in Vereinigung ihm eine $p$mal so grosse Geschwindigkeit, als jeder Stoss einzeln, beibringen. Es wird daher unter der Wirkung der Kraft P, wenn sie das $p$fache von Q ist, und wenn der Körper, wie vorhin, jedesmal ruhend vorausgesetzt wird, die constante Zunahme der Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit $p$mal so gross sein, als wenn die Kraft Q wirkt. Constante beschleunigende Kräfte verhalten sich hiernach, wie die von ihnen in der Zeiteinheit (oder überhaupt in gleicher Zeit) erzeugten Incremente der Geschwindigkeit; und wenn man daher, wie es gewöhnlich ist, und auch hier geschehen soll, diejenige constante Kraft $= 1$ setzt, unter deren Wirkung das Increment der Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit $= 1$ ist, so wird man jede andere constante Kraft durch dieselbe Zahl auszudrücken haben, welche das von der Kraft in jeder Zeiteinheit bewirkte Increment der Geschwindigkeit ausdrückt, — also durch $m\gamma$, wenn γ die von einem einzelnen Stosse erzeugte Geschwindigkeit ist, — oder durch $mm \,.\, A_1 B_1$, wo $A_1 B_1$ den Weg vorstellt, den der von einem einzelnen Stosse getriebene Körper (mit der Geschwindigk. $\gamma = m \,.\, A_1 B_1$) in jedem Zeitelemente zurücklegt.

So ist z. B. beim freien Falle der Körper, als einer geradlinigen nach unten gerichteten Bewegung, deren Geschwindigkeit in jeder Secunde um 30 Fuss wächst, eine nach unten gerichtete constante Kraft, $= 30$, thätig, wenn die Secunde zur Zeiteinheit und der Fuss zur Linieneinheit genommen wird. Man nennt diese Kraft die Schwerkraft.

§. 21.

Im Allgemeinen sind bei einer gegebenen Bewegung $A_0 A_1 A_2 \ldots$ die Geschwindigkeiten $m \,.\, A_1 B_1$, $m \,.\, A_2 B_2$, …, und mithin auch die in gleichen Zeitelementen auf einander folgenden Stösse, welche zur Erzeugung jener Bewegung dem Körper ertheilt werden müssen, von einem Elemente zum andern entweder ihrer Richtung, oder ihrer Grösse nach, oder in beiderlei Hinsicht, verschieden. Man sagt alsdann, dass der Körper von einer veränderlichen be-

schleunigenden Kraft getrieben werde, und bestimmt deren Richtung und Grösse zu einer gewissen Zeit aus dem gleichzeitig statt findenden Stosse eben so, als wie die Richtung und Grösse einer constanten Kraft aus einem der einander dann gleichen und gleichgerichteten Stösse bestimmt wird. Die den Körper A treibende veränderliche Kraft hat hiernach in den Zeitpunkten $T_1, T_2, \ldots$ die Richtungen A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$ und die Werthe $mm \,.\, A_1B_1$, $mm \,.\, A_2B_2, \ldots$.

In dem Falle, wenn die Bewegung von A geradlinig ist, liegen $A_0, A_1, A_2, \ldots$, mithin auch $B_1, B_2, \ldots$ in derselben Geraden, und es ist $A_1B_1 = A_1A_2 - A_0A_1$. Die beschleunigende Kraft hat dann folglich dieselbe Linie, in welcher sich der Körper bewegt, zu ihrer Richtung, und ihre Grösse zur Zeit T_1 ist $= mm \,.\, A_1B_1 = m\,(m \,.\, A_1A_2 - m \,.\, A_0A_1) =$ dem $m$fachen des Wachsthums von $m \,.\, A_0A_1$ während des Elements T_0T_1, = der Geschwindigkeit, mit welcher $m \,.\, A_0A_1$ wächst (§. 11.), d. h. *Bei der Bewegung eines Körpers in gerader Linie ist die beschleunigende Kraft stets der Geschwindigkeit gleich, mit welcher sich die Geschwindigkeit des Körpers ändert.*

Ist daher die Entfernung x des Körpers zur Zeit t von einem beliebig gewählten Anfangspunkte der Linie, als eine Function von t, gegeben, und heisst x', wie in §. 11., die daraus abzuleitende Geschwindigkeit von x, und x'' die Geschwindigkeit von x', so ist x' die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t, und x'' die ihn zu derselben Zeit beschleunigende Kraft.

Beispiele. 1) Sei $x = a + bt + ct^2$, so ist $x' = b + 2ct$ und $x'' = 2c$, also die Kraft constant und der Zunahme von x' in der Zeiteinheit gleich, wie uns schon bekannt war.

2) Bewegt sich ein Körper A (Fig. 10.) zwischen den Punkten M und N nach dem in §. 14. geometrisch dargestellten und durch die Formel $x = a \cos(\alpha + nt)$ ausgedrückten Gesetze hin und zurück, so ist $x' = -na \sin(\alpha + nt)$, und da nach den Formeln II. ebds. von $a \sin(\alpha + nt)$ die Geschwindigkeit $= na \cos(\alpha + nt)$ ist, so wird $x'' = -nna \cos(\alpha + nt) = -nnx = -nn \,.\, OA = nn \,.\, AO$.

Die Kraft treibt daher den Körper A stets nach dem Mittelpunkte O hin und ist dem Abstande des A von O proportional.

Dasselbe folgt aus der Formel $y = a \sin (\alpha + nt)$ für den zwischen R und S sich bewegenden Körper B. Denn seine Geschwindigkeit ist $= y' = na \cos (\alpha + nt)$, und mithin die ihn beschleunigende Kraft $= y'' = -nna \sin (\alpha + nt) = -nny = nn \,.\, BO$.

§. 22.

Ein Resultat, welches dem im vorigen §. für die geradlinige Bewegung erhaltenen ganz analog ist, ergiebt sich auch für die krummlinige. Zu dem Ende lasse man einen Punkt H (Fig. 13.) sich so bewegen, dass sein Abstand OH von einem festen Punkte O stets gleich und gleichgerichtet der Linie ist, welche die Geschwindigkeit des Körpers A ausdrückt, dass also

$$OH_0 \equiv m \,.\, A_0 A_1 \,,\; OH_1 \equiv m \,.\, A_1 A_2 \equiv m \,.\, A_0 B_1 \,,\; \text{etc.}$$

Es folgt hieraus (§. 1. IV.) $H_0 H_1 \equiv m \,.\, A_1 B_1$ und $m \,.\, H_0 H_1 \equiv mm \,.\, A_1 B_1$, d. h. *die einen beliebig sich bewegenden Körper beschleunigende Kraft wird ihrer Grösse und Richtung nach durch die Geschwindigkeit eines Punktes (H) ausgedrückt, der sich so bewegt, dass sein Abstand von einem festen Punkte (O) stets gleich und gleichgerichtet der Geschwindigkeit des Körpers ist.*

So hatten wir in §. 14. bei dem sich gleichförmig um O (Fig. 10) in einem Kreise nach der Linken bewegenden Körper P die Linie $OH \equiv$ der constanten Geschwindigkeit von P gemacht, also den Winkel $POH = 90^0$ und $OH = c$. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung von P wird sich daher der Punkt H in derselben Zeit, wie P, gleichförmig um O nach der Linken in einem Kreise bewegen, dessen Halbmesser $= c$ ist. Da sich bei gleichen Umlaufszeiten die Geschwindigkeiten gleichförmiger Kreisbewegungen (von P und H) offenbar wie die Halbmesser der Kreise (a und c) verhalten, und da die Geschwindigkeit von P, $= c$ ist, so ist die von H, $= cc : a$; die Richtung derselben ist perpendikular auf OH nach der Linken zu, also parallel mit PO. Nach dem vorigen Satze wird daher die Bewegung

eines Körpers mit der constanten Geschwindigkeit c in einem Kreise, dessen Halbmesser a ist, durch eine Kraft

$$=\frac{cc}{a}=\frac{\pi\pi}{UU}\,a=nna \text{ (§. 14.)}$$

hervorgebracht, welche den Körper stets nach dem Mittelpunkte des Kreises treibt.

Anmerkung. Wie aus §§. 10. und 11. hervorgeht, ist die Geschwindigkeit einer sich mit der Zeit ändernden Grösse x das $m$fache der Aenderung von x während eines Zeitelements. Ist nun das sich Aendernde eine gerade Linie OH, die nicht bloss ihre Grösse, sondern auch ihre Richtung ändert, zur Zeit $T_0 \equiv OH_0$, und zur Zeit $T_1 \equiv OH_1$ ist, so wird man unter ihrer Aenderung während des Elements $T_0 T_1$, wenn man dabei die Grösse und Richtung zugleich berücksichtigt, nicht den bloss arithmetisch zu bestimmenden Ueberschuss von OH_1 über OH_0, sondern die Linie $H_0 H_1$ zu verstehen haben, als welche, mit OH_0 geometrisch zusammengesetzt, OH_1 giebt. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Linie OH (zur Zeit T_0 oder T_1) ändert, wird folglich $\equiv m \,.\, H_0 H_1$, also eine Linie sein, die wiederum nicht bloss ihrer Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach, im Allgemeinen sich ändert. Es ist aber $OH \equiv$ der Geschwindigkeit von A, und $m \,.\, H_0 H_1 \equiv$ der auf A wirkenden Kraft; mithin können wir in dem erklärten Sinne, wie bei jeder geradlinigen, so auch bei jeder krummlinigen Bewegung sagen, *dass die beschleunigende Kraft, welche sie hervorbringt, gleich und gleichgerichtet der Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Geschwindigkeit des Körpers ändert.*

§. 23.

Zusätze. *a.* Der vorhin erhaltene und für die ganze Folge sehr wichtige Satz, *dass bei einer gleichförmigen Kreisbewegung die beschleunigende Kraft stets nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet und dem Quadrate der Geschwindigkeit c, dividirt durch den Halbmesser a des Kreises, gleich ist,* lässt sich folgendergestalt noch etwas anschaulicher darthun. — Wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung sind $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... von gleicher Länge, und es lässt sich daher die Bahn $A_0 A_1 A_2$ ... als ein in den Kreis (Fig. 14.) beschriebenes reguläres Vieleck betrachten; die Linie $A_1 O$ nach dem Mittelpunkte O des Kreises halbirt folglich den Winkel $A_0 A_1 A_2$. Ferner ist hier das Parallelo-

gramm $A_0 A_1 A_2 B_1$ ein Rhombus; die Diagonale $A_1 B_1$, oder die Richtung der Kraft, halbirt mithin gleichfalls den Winkel $A_0 A_1 A_2$ und ist daher nach dem Mittelpunkte O gerichtet. Dabei sind die Dreiecke $A_1 A_0 B_1$ und $A_0 O A_1$ einander ähnlich, weil sie gleichschenklig sind und den Winkel $A_0 A_1 B_1$ gemein haben. Es verhält sich daher $OA_0 : A_0 A_1 = A_0 A_1 : A_1 B_1$, mithin auch

$OA_0 : m \,.\, A_0 A_1 = m \,.\, A_0 A_1 : mm \,.\, A_1 B_1$, folglich etc.

b. Ganz durch dieselben Schlüsse zeigt sich, dass auch bei jeder andern krummlinigen Bewegung, wenn sie gleichförmig, und daher $A_0 A_1 = A_1 A_2 =$ etc. ist, die Kraft in A_1 nach dem Mittelpunkte O des durch A_0, A_1, A_2 zu beschreibenden Kreises gerichtet und $= mm \,.\, A_0 A_1^2 : OA_0$ ist; d. h. bei einer gleichförmigen krummlinigen Bewegung ist die beschleunigende Kraft nach dem Mittelpunkte des an die Bahn durch den jedesmaligen Ort des Körpers beschriebenen Krümmungskreises gerichtet, also in der Krümmungsebene enthalten und darin, normal auf der Bahn, von der erhabenen nach der hohlen Seite gerichtet; ihre Stärke aber ist dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, gleich, und daher der Krümmung selbst proportional.

c. Ist die krummlinige Bewegung ungleichförmig, so muss, ausser der eben so wie vorhin im Punkte A_1 bestimmten Kraft, noch eine zweite thätig sein. Denn erstere würde zwar bewirken, dass der Körper in dem nächstfolgenden Zeitelemente nach der veränderten Richtung $A_1 A_2$ fortginge; allein die Grösse der Geschwindigkeit würde unverändert $= m \,.\, A_0 A_1$ geblieben sein. Mithin muss noch in der Richtung $A_1 A_2$, d. h. in tangentieller Richtung, eine Kraft wirken, welche die Veränderung der Grösse der Geschwindigkeit in $m \,.\, A_1 A_2$ hervorbringt, also eine Kraft $= mm\,(A_1 A_2 - A_0 A_1)$. Dies führt uns zu folgendem Resultate:

„Die beschleunigende Kraft, durch welche eine sich stetig „ändernde Bewegung hervorgebracht wird, ist stets in der „Krümmungsebene der Bahn enthalten. Zerlegt man diese „Kraft, wie sie zu einer gewissen Zeit T_1 statt hat, in zwei

„Kräfte, von denen die eine normal auf der Bahn ist und „daher Normalkraft heisst, die andere in tangentieller „Richtung wirkt und daher Tangentialkraft genannt „wird, so ist die Normalkraft eben so gross, als wenn von „T_1 an sich nicht mehr die Geschwindigkeit, sondern bloss „die Richtung änderte, also eben so gross, als bei einer „Bewegung mit derselben Geschwindigkeit in einem Kreise, „der dieselbe Krümmung, wie die Bahn zur Zeit T_1, hat; „die Tangentialkraft aber ist eben so gross, als wenn von „T_1 an sich nicht mehr die Richtung, sondern bloss die Ge- „schwindigkeit änderte, also eben so gross, als bei einer „geradlinigen Bewegung, deren Geschwindigkeit sich nach „demselben Gesetze, wie bei der krummlinigen, ändert."

§. 24.

Lehrsatz. Ist eine Bewegung (von A) aus zwei oder mehrern Bewegungen (von C, D, ...) zusammengesetzt, so ist auch in jedem Zeitpunkte die Kraft, durch welche die erstere Bewegung hervorgebracht wird, zusammengesetzt aus den Kräften, welche die letztern hervorbringen.

Beweis. Die auf A zur Zeit T_1 wirkende Kraft ist $\equiv mm \,.\, A_1 B_1 \equiv$ dem mmfachen einer Linie, sie heisse a, welche aus $A_1 A_0$ und $A_0 B_1$ oder $A_1 A_2$ zusammengesetzt ist (§. 21.); und eben so sind die gleichzeitig auf C, D, ... wirkenden Kräfte $\equiv$ den mmfachen von Linien c, d, ..., von denen c aus $C_1 C_0$ und $C_1 C_2$, d aus $D_1 D_0$ und $D_1 D_2$ zusammengesetzt ist. Es ist daher nur zu beweisen, dass die aus $A_1 A_0$ und $A_1 A_2$ zusammengesetzte Linie a durch Zusammensetzung von c, d, ... d. i. von $C_1 C_0$, $C_1 C_2$, $D_1 D_0$, $D_1 D_2$ etc. gefunden wird. Dies folgt aber sogleich daraus, dass nach der Voraussetzung $A_1 A_0$ aus $C_1 C_0$, $D_1 D_0$, ... und $A_1 A_2$ aus $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, ... zusammengesetzt ist (§. 6.).

Anderer Beweis. Weil die Bewegung von A aus denen von C, D, ... zusammengesetzt ist, so ist es auch die Geschwindigkeit von A aus den Geschwindigkeiten von C, D, ... (§. 12.). Lässt man daher die Punkte H, K, L, ... sich so bewegen, dass ihre Abstände von einem festen Punkte O resp. den Geschwindigkeiten von A, C, D, ...

stets gleich und gleichgerichtet sind, so ist stets *OH* aus *OK*, *OL*, ..., folglich die Bewegung von *H* aus denen von *K*, *L*, ..., folglich auch stets die Geschwindigkeit von *H* aus denen von *K*, *L*, ... (§. 12.), d. i. (§. 22.) die auf *A* wirkende Kraft aus denen, welche auf *C*, *D*, ... wirken, zusammengesetzt.

Folgerungen. *a*. Hat *B* (Fig. 8.) gegen einen festen Punkt *F* dieselbe Bewegnng, welche *P* gegen *A* hat, so ist (§. 5.) die Bewegung von *P* aus denen von *A* und *B*, folglich auch *p* aus *a* und *b* zusammengesetzt, wenn *a*, *b*, *p* die Kräfte bezeichnen, welche die Bewegungen von *A*, *B*, *P* hervorbringen; folglich *b* aus *p* und der nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft *a* zusammengesetzt (§. 2. *d*.). Aus den Kräften *a* und *p*, durch welche die Bewegungen zweier Körper *A* und *P* erzeugt werden, wird demnach, wenn man, die Bewegnng von *P* gegen *A* unverändert lassend, *A* rnhend annimmt, die Kraft, welche dann auf *P* wirken muss, gefunden, wenn man *p* mit der nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft *a* zusammensetzt.

b. Wird eine Bewegung auf eine der drei in §. 12. *b*. gedachten Arten in zwei oder drei zerlegt, so ergeben sich die Kräfte, welche die letztern Bewegungen hervorbringen, wenn man die zur erstern nöthige Kraft auf dieselbe Art zerlegt. — Der Beweis hiervon wird mittelst des obigen Lehrsatzes ähnlicher Weise geführt, wie in §. 12. der entsprechende Satz von der Zerlegung der Geschwindigkeit dargethan wurde.

Eben so können wir mit Anwendung des Begriffs der Projection schliessen: *die Kraft bei einer auf eine Gerade oder eine Ebene projicirten Bewegung ist der auf dieselbe Gerade oder Ebene projicirten Kraft bei der ursprünglichen Bewegung gleich.*

Beispiele. 1) Ein sich gleichförmig in einem Kreise bewegender Körper *P* (Fig. 10.) wird von der ihn beschleunigenden Kraft stets nach dem Mittelpunkte *O* des Kreises getrieben. Drücken wir daher diese Kraft geradezu durch *PO* aus, so ist *AO*, als die rechtwinklige Projection von *PO* auf den Durchmesser *MN*, die Kraft, von welcher der

Körper A bei seiner in §. 14. betrachteten Bewegung zwischen M und N getrieben wird. Es war aber die erstere Kraft $= nn \,.\, PO$ (§. 22.); mithin ist die letztere $= nn \,.\, AO$, wie schon in §. 21. 2. auf andere Weise gefunden worden.

2) Projiciren wir dieselbe gleichförmige Kreisbewegung von P rechtwinklig, statt auf MN, auf eine durch MN gelegte und mit der Ebene des Kreises einen schiefen Winkel $= i$ machende Ebene, so bewegt sich die Projection von P, die wiederum A heisse, in einer Ellipse, deren Mittelpunkt O, deren grosse Axe $MN = 2a$, und deren kleine $= 2a \cos i$ ist. Die auf A wirkende Kraft ist, wie vorhin, $= nn \,.\, AO = \pi\pi \,.\, AO : UU$.

Das Gesetz, nach welchem A in der Ellipse fortgeht, lässt sich hier auf eine eigenthümliche Weise bestimmen. Weil nämlich P im Kreise sich gleichförmig bewegt, so werden auch die vom Halbmesser OP in gleichen Zeiten überstrichenen Theile der Kreisfläche einander gleich sein. Da ferner, wenn irgend zwei einander gleiche Theile einer Ebene auf eine andere Ebene projicirt werden, auch die Theile in der Projection einander gleich sind, so wird von A die Ellipse dergestalt beschrieben werden, dass die Gerade OA in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. — Hiernach, und weil sich jede Ellipse als die rechtwinklige Projection eines Kreises betrachten lässt, können wir folgenden Satz aufstellen:

„Bewegt sich ein Körper A in einer Ellipse dergestalt, „dass die vom Mittelpunkte O der Ellipse bis zu ihm ge„zogene Gerade OA in gleichen Zeiten gleiche Flächen über„streicht, so ist die auf den Körper wirkende Kraft stets „nach O gerichtet und seinem Abstande von O proportional, „nämlich $= \pi\pi \,.\, AO : UU$, wo U die halbe Umlaufszeit (im „Kreise und daher auch) in der Ellipse bedeutet."

§. 25.

Lehrsatz. Ist für einen gewissen Zeitpunkt T_0 der Ort A_0 eines sich bewegenden Körpers A und seine Geschwindigkeit gegeben, für jeden Zeitpunkt aber die ihn beschleunigende Kraft ihrer Stärke und Richtung nach, sei

es als eine unmittelbar von der Zeit, oder als eine von seinem jedesmaligen Orte, oder seiner Geschwindigkeit abhängige Grösse, gegeben, so ist die Bewegung des Körpers vollkommen bestimmt.

Beweis. Mit dem Orte A_0 und der Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit T_0 ist sein Weg A_0A_1 während des Elements T_0T_1, also auch sein Ort A_1 zur Zeit T_1, vollkommen bestimmt. Der Voraussetzung zufolge ist ferner für die Zeit T_1 die Grösse und Richtung der Kraft, also auch der Diagonale A_1B_1 des Parallelogramms $A_0A_1A_2B_1$ (Fig. 13.), gegeben. Man kann daher dasselbe construiren und damit den Weg A_1A_2 während T_1T_2 finden. Gleicherweise lässt sich hieraus und aus der dann gegebenen Kraft zur Zeit T_2 der Weg während T_2T_3, u. s. w. bestimmen.

Folgerung. Hat man ans der gegebenen Bewegung eines Körpers das Gesetz bestimmt, nach welchem die ihn beschleunigende Kraft wirkt, so kann man umgekehrt schliessen, dass, wenn den Körper eine Kraft nach dem gefundenen Gesetze treibt, und er zu irgend einer Zeit T_0 die Geschwindigkeit hat, welche ihm der gegebenen Bewegung gemäss zukommt, seine jetzige Bewegung der gegebenen gleich ist.

Beispiele. 1) Aus der Theorie der gleichförmigen Kreisbewegung, wo die beschleunigende Kraft $p = cc : a$ und stets nach dem Mittelpunkte gerichtet war (§. 22.), folgern wir: Wirkt auf einen Körper eine nach einem festen Punkte O gerichtete Kraft von constanter Grösse $= p$, und ist die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit perpendikular auf der Geraden, welche den anfänglichen Ort A_0 des Körpers mit O verbindet, die Geschwindigkeit selbst aber $= \sqrt{p \, . \, OA_0}$, so beschreibt der Körper mit sich gleich bleibender Geschwindigkeit um O als Mittelpunkt einen Kreis.

Weil der Körper von O stets in derselben Entfernung bleibt, so kann man hierbei, statt die Kraft constant zu setzen, auch annehmen, dass sie einen von der Entfernung des Körpers von O beliebig abhängigen Werth habe, d. i. irgend eine Function dieser Entfernung sei.

2) Die in §. 14. und §. 24. 1. betrachtete Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung auf einen Durchmesser des Kreises führt uns zu folgendem Satze:

„Wird ein Körper A von einer Kraft getrieben, welche „stets nach einem festen Punkte O (Fig. 10.) gerichtet und „dem Abstande des A von O proportional ist, also $= nn \,.\, AO$ „gesetzt werden kann, wo n ($= \pi : U$) eine constante Zahl „bedeutet, so bewegt sich der Körper, wenn er anfangs in „M in Ruhe war, in gerader Linie nach O zu, sodann eben „so weit über O hinaus bis N, hierauf durch O wieder zurück „bis M, und fährt auf diese Weise fort zwischen M und N „hin und her zu schwingen. Die Schwingungsdauer, d. i. die „Dauer eines solchen Hin- oder Herganges, ist $= \pi : n = U$, „und daher unabhängig von der Schwingungsweite MN. „Dabei ist die Geschwindigkeit von A ($= n \,.\, AP$) $=$ „$n\sqrt{(OM^2 - OA^2)}$, also null, wenn A in M oder N selbst „sich befindet, am grössten aber, $= n \,.\, OM$, wenn A in O ist."

3) Ist der Körper A, auf welchen die nach O gerichtete Kraft $nn \,.\, AO$ wirkt, anfangs in A nicht in Ruhe, sondern hat er eine Geschwindigkeit $= AC$, so wird er, wenn die Richtung derselben durch O geht, nach demselben Gesetze, wie vorhin, geradlinige Schwingungen, jede in einer Zeit $= \pi : n$, machen, und sich dabei von O zu beiden Seiten um eine Weite $= \sqrt{[OA^2 + (AC^2 : nn)]}$ entfernen. Trifft aber die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit AC den Punkt O nicht, so wird der Körper, wie sich aus §. 24. 2. folgern lässt, nach dem dort angegebenen Gesetze sich in einer Ellipse bewegen, welche O zum Mittelpunkte hat und, durch A gehend, von AC daselbst berührt wird*). Die Umlaufszeit in der Ellipse ist $= 2\pi : n$.

*) Es lässt sich diese elliptische Bewegung, wie in §. 24., als die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung betrachten. Der Kreis selbst hat O zum Mittelpunkte, schneidet das in A auf der Ebene OAC errichtete Perpendikel, es geschehe in Z, und berührt daselbst die auf OAC perpendikulare Ebene ZAC. Die zur Construction dieses Kreises, und damit auch der Ellipse, noch zu wissen nöthige Linie AZ findet sich durch die Gleichung:

$$n^2 z^2 (z^2 + r^2) = c^2 (z^2 + r^2 \cos \alpha^2),$$

§. 26.

Die im vorigen §. hinzugefügten Beispiele enthalten die ersten Gründe der für die Naturlehre so wichtigen Theorie der Pendelbewegung. — Denkt man sich einen schweren Körper durch eine nicht schwere gerade Linie von unveränderlicher Länge mit einem festen Punkte F (Fig. 15.) verbunden, so dass sich der Körper auf der Oberfläche einer Kugel, welche F zum Mittelpunkte und die Länge der Linie, welche l heisse, zum Halbmesser hat, frei bewegen kann, so erhält man den Begriff eines mathematischen oder einfachen Pendels. Vermöge der auf den Körper wirkenden Schwerkraft wird derselbe nur dann in stabiler Ruhe sein, wenn er sich in dem vertical unter F gelegenen Punkte O der Kugelfläche befindet. Ist er aber in irgend einem andern Punkte M der Fläche, so wird er durch die Schwerkraft in dem aus F zu beschreibenden Bogen MO nach O zurückgetrieben. Es giebt nämlich diese constante Kraft, sie heisse g, wenn man sie nach der Richtung FM und nach der in M an den Bogen MO zu ziehenden Tangente zerlegt, die Kräfte $g' = g \cos MFO$ und $g'' = g \sin MFO$. Da nun der Körper nach ersterer Richtung gar nicht, und nach letzterer vollkommen frei beweglich ist, so ist g' ganz unwirksam; dagegen wirkt die Kraft g'' in ihrer vollen Stärke auf die Bewegung des Körpers.

Nehmen wir jetzt noch den Winkel MFO so klein an, dass der Bogen MO als eine gerade Linie betrachtet werden kann, so wird $\sin MFO = MO : l$, und es wirkt daher auf den Körper, wenn er in M ist, nach der Richtung MO eine Kraft $= g \,.\, MO : l$, also eine seinem Abstande von O proportionale Kraft, und dasselbe geschieht auch in jedem andern Orte, den er in der Nähe von O einnehmen kann. Der

---

worin $z = AZ$, $r = OA$, $c = AC$ und $\alpha = OAC$. Diese Gleichung hat, nach z^2 aufgelöst, zwei reelle Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere aber negativ ist und daher keinen reellen Werth für z selbst giebt. Die zwei einander gleichen und entgegengesetzten Werthe von z, welche aus dem positiven z^2 entspringen, führen aber ersichtlich zu einer und derselben Ellipse.

Körper wird folglich, wenn er nach M gebracht und hierauf sich selbst überlassen wird, nach dem vorhin beschriebenen Gesetze Schwingungen zu machen anfangen, deren Weite $= 2OM = NM$, und deren Dauer

$$U = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

indem das vorige nn hier $g : l$ ist. Wegen des Widerstandes der Luft und, wenn wir an die Stelle der mathematischen Linie etwa einen feinen Faden setzen, wegen der Steifheit desselben, welche sich seiner Biegung am Aufhängepunkte F fortwährend entgegensetzt, wird die Weite dieser Schwingungen immer kleiner werden und der Körper zuletzt in O zur Ruhe kommen. Die Dauer der Schwingungen aber wird bis zuletzt unverändert bleiben, weil diese von der Weite unabhängig ist.

Man sieht hieraus, wie man mit Hülfe eines solchen Pendels die Grösse der Schwerkraft g mit ausserordentlicher Schärfe bestimmen kann. Hat man nämlich seine Länge l gemessen und die Dauer U einer seiner Schwingungen durch Beobachtung der Zeit, welche über einer sehr grossen Anzahl auf einander folgender Schwingungen verstreicht, bestimmt, so findet sich

$$g = \frac{\pi\pi l}{UU}.$$

So ist z. B. nach Bessel's Messungen die Länge des Secundenpendels, d. h. eines Pendels, dessen Schwingungsdauer 1 Secunde beträgt, auf der Königsberger Sternwarte 440,8147 par. Linien*) = 3,0612 Fuss. Nimmt man daher die Secunde zur Zeiteinheit, so wird $U = 1$ und es findet sich damit für Königsberg:

$$g = (3{,}14159.)^2 . \, 3{,}0612 = 30{,}213 \text{ Fuss.}$$

Man kann noch bemerken, dass der in F aufgehängte Körper, wenn man ihn nach einer kleinen Ablenkung von O nicht sich selbst überlässt, sondern ihm einen kleinen horizontalen Seitenstoss giebt, in der horizontalen Fläche, in welcher er um O herum frei beweglich ist, um O als

*) Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels, Seite 55.

Mittelpunkt eine Ellipse, oder auch einen Kreis, nach dem im vorigen §. erklärten Gesetze zu beschreiben anfangen wird. Die Umlaufszeit in der Ellipse wird doppelt so gross als die Dauer einer einfachen Schwingung sein, so dass z. B. ein Secundenpendel zur Beschreibung seiner Ellipse zweier Secunden bedarf.

§. 27.

Der Satz des §. 25., dass die Bewegung eines Körpers A vollkommen bestimmt ist, wenn es für jeden Zeitpunkt O die beschleunigende Kraft, und für einen gewissen Zeitpunkt T_0 die Geschwindigkeit und der Ort von A ist, dies lässt sich, wenn die Kraft unmittelbar als Function der Zeit gegeben ist und daher schon im Voraus für jeden Zeitpunkt bestimmt werden kann, geradezu mittelst des entsprechenden Satzes in §. 13. darthun. Denn denkt man sich, wie in §. 22., einen Punkt H (Fig. 13.) hinzu, der sich dergestalt bewegt, dass sein Abstand von einem festen Punkte O der Geschwindigkeit von A gleich ist, so ist die Geschwindigkeit von $H \equiv$ der auf A wirkenden Kraft, und daher nach der Voraussetzung für jeden Zeitpunkt gegeben. Ferner ist die Linie $OH_0 \equiv$ der Geschwindigkeit von A zur Zeit T_0, und daher ebenfalls gegeben. Nach §. 13. ist folglich die Bewegung von H gegen O, oder die Grösse und Richtung von OH für jeden Zeitpunkt, vollkommen bestimmt; mithin ist es auch die Geschwindigkeit von A. Und da noch der Ort von A zur Zeit T_0 als gegeben vorausgesetzt wird, so ist nach dem nämlichen Satze die Bewegung von A selbst vollkommen bestimmt.

Nehmen wir z. B. an, dass die Kraft, also auch die Geschwindigkeit von H, ihrer Richtung und Grösse nach constant sei, und dass sich daher H gleichförmig in einer Geraden h (Fig. 16.) bewege. Sind alsdann H_0 und H_1, als die Oerter von H in zwei beliebigen Zeitpunkten T_0 und T_1, und ausserdem noch die Oerter von O und A_0 gegeben, so ist damit die Bewegung von A vollkommen bestimmt. Liege nämlich, um hier nur den allgemeinern Fall in Betracht zu ziehen, O ausserhalb h. Man ziehe durch A_0 mit h und

mit OH_0 die Parallelen x und y, so bewegt sich A in der Ebene xy, weil OH, $\equiv$ der Geschwindigkeit von A, in der damit parallelen Ebene OH_0, h liegt. Man denke sich nun A durch Parallelen mit y und x auf x und y projicirt und nenne B und C diese Projectionen, so sind die Geschwindigkeiten von B und $C \equiv$ der auf x und y projicirten Geschwindigkeit OH von A, also $\equiv$ H_0H und OH_0. Weil H_0H sich der Zeit proportional ändert, so wird, wenn man die Zeit t von T_0 an rechnet und T_0T_1 zur Zeiteinheit nimmt, H_0H oder die Geschwindigkeit von B, $= H_0H_1 . t$; und weil für $t = 0$ diese Geschwindigkeit null wird und B mit A_0 zusammenfällt, so kommt (§. 13.)

$$(1) \quad A_0B = \tfrac{1}{2} H_0H_1 . t^2.$$

Die Geschwindigkeit von C ist constant, $\equiv OH_0$, und weil auch C für $t = 0$ mit A_0 zusammenfällt, so hat man

$$(2) \quad A_0C = OH_0 . t.$$

Durch diese zwei Gleichungen sind aber die Bewegungen von B und C, und damit auch die von A, bestimmt. Eliminirt man aus ihnen t, so findet sich:

$$(3) \quad A_0C^2 = 2\frac{OH_0^2}{H_0H_1} . A_0B,$$

als die Gleichung zwischen den Coordinaten A_0B und A_0C der von A beschriebenen Curve. „Ein Körper, auf den eine „constante beschleunigende Kraft $\equiv H_0H_1$, z. B. die Schwer„kraft, wirkt, und dessen anfängliche Geschwindigkeit, $\equiv OH_0$, „mit der Kraft nicht parallel ist, bewegt sich demnach in „einer Parabel, welche eine mit der Richtung der Kraft „parallele Axe und im Anfangspunkte der Bewegung die „Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit zur Tangente „hat, und deren Parameter für den Anfangspunkt, als Schei„tel, $= 2OH_0^2 : H_0H_1$ ist."

Zusätze. *a.* Da der Anfangspunkt der Zeit willkührlich genommen werden kann, so erhellet, dass, wenn man für A_0 irgend einen andern Punkt der von A beschriebenen Curve wählt, durch ihn eine Gerade x, parallel mit h, und eine die Curve daselbst berührende Gerade y zieht und die Bewegung von A nach diesen x und y in die Bewegungen

von B und C zerlegt, auch in diesem neuem Systeme die Linie $A_0 B$ dem Quadrate der seit dem Durchgange des Körpers durch A_0 verflossenen Zeit und die Linie $A_0 C$ dieser Zeit selbst, folglich wie vorhin die Abscisse $A_0 B$ dem Quadrate der Ordinate $A_0 C$ proportional sein wird, — eine bekannte Eigenschaft der Parabel, die somit sehr einfach sich dargethan findet.

b. Man ziehe in A an die Parabel eine Tangente, welche $A_0 B$ in D und $A_0 C$ in E schneide. Weil die Geschwindigkeit in $A \equiv OH$ ist, so ist DA parallel mit OH, und daher die Seiten der Dreiecke ABD und $OH_0 H$ parallel mit einander; mithin verhält sich $DB : BA = H_0 H : OH_0 = H_0 H_1 . t : OH_0 = 2A_0 B : A_0 C$ (zufolge (1) und (2)) $= 2A_0 B : BA$, und daher $DB = 2A_0 B$, was ebenfalls eine bekannte Eigenschaft der Parabel ist. — Es folgt hieraus weiter, dass, so wie DB in A_0, auch DA in E und $A_0 C$ in E halbirt wird.

c. Die Geschwindigkeiten in A_0 und A verhalten sich wie $OH_0 : OH = BA : DA = A_0 E : DE = A_0 E : EA$, also wie die Theile der in A_0 und A gezogenen Tangenten zwischen diesen Punkten und dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der Tangenten.

d. Bezeichnen A_1, B_1, C_1, E_1 die Oerter von A, B, C, E für $t = 1$, so hat man zufolge der Gleichung (2) ... $A_0 C_1 = OH_0$, also $A_0 E_1 = E_1 C_1 = \frac{1}{2} OH_0$ und, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $E_1 C_1 A_1$ und $OH_0 H_1$, $E_1 A_1 = \frac{1}{2} OH_1$. Macht man daher in der Linie h, $H_0 H_1 = H_1 H_2 = H_2 H_3 =$ etc., wo H_0, H_1, H_2, ... die Oerter von H fur $t = 0, 1, 2, \ldots$ sind, und legt man durch A_0, A_1, A_2, ..., als die entsprechenden Oerter von A, Tangenten, von denen sich die 1ste und 2te in E_1, die 2te und 3te in E_2, die 3te und 4te in E_3, etc. schneiden, so ist

$$A_0 E_1 \equiv \tfrac{1}{2} OH_0,\ E_1 A_1 \equiv \tfrac{1}{2} OH_1, \text{ und eben so}$$
$$A_1 E_2 \equiv \tfrac{1}{2} OH_1,\ E_2 A_2 \equiv \tfrac{1}{2} O H_2,$$

u. s. w., folglich $E_1 E_2 \equiv OH_1$, und eben so $E_2 E_3 \equiv OH_2$, etc., welches nachstehenden Satz giebt:

„Sind H_0, H_1, H_2, ... (Fig. 17.) eine Reihe von Punk„ten in einer Geraden h, welche in gleichen Zwischenräumen

„auf einander folgen, und O ein Punkt ausserhalb dieser „Geraden, so berühren die Linien OH_0, OH_1, OH_2, ..., „wenn man sie in ihrer Folge parallel mit sich an einander „setzt und desshalb $E_0E_1 \equiv OH_0$, $E_1E_2 \equiv OH_1$, $E_2E_3 \equiv$ „OH_2, ... macht, in ihren Mittelpunkten A_0, A_1, A_2, ... „eine Parabel, deren Axe mit h parallel ist. — Ein Körper, „der, von einer constanten mit h parallelen Kraft getrieben, „diese Parabel beschreibt, legt die Abschnitte A_0A_1, A_1A_2, ... „derselben in gleichen Zeiträumen zurück, und wenn ein „solcher Zeitraum zur Zeiteinheit genommen wird, so wer- „den durch die Linien E_0E_1, E_1E_2, ... die Geschwindig- „keiten in A_0, A_1, ... und durch H_0H_1 die beschleunigende „Kraft dargestellt.“

Drittes Kapitel.

Theorie der epicyklischen Bewegung.

§. 28.

Aufgabe. Um einen festen Punkt O (Fig. 18.), als Mittelpunkt, bewegt sich ein Körper A gleichförmig in einem Kreise; zu gleicher Zeit bewegt sich in der Ebene dieses Kreises ein zweiter Körper A_1 gleichförmig um A, als Mittelpunkt, in einem Kreise; eben so ein dritter Körper A_2 um den zweiten, ein vierter A_3 um den dritten, u. s. w. Es sind die Halbmesser $OA = a$, $AA_1 = a_1$, $A_1A_2 = a_2$, etc. dieser Kreise, die constanten Winkelgeschwindigkeiten n, n_1, n_2, ... der Körper A, A_1, ... bei ihren Kreisbewegungen und nächstdem die Winkel α, α_1, α_2, ... gegeben, welche die Halbmesser OA, AA_1, A_1A_2, ... in einem gewissen Zeitpunkte T mit einer in der Ebene durch O gelegten festen Geraden OR bilden. Man soll in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Axe der x OR ist, die Coordinaten x, y; x_1, y_1; etc. der Körper A, A_1, ... am Ende einer seit T verflossenen Zeitlänge t finden.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, dass alle Winkel in der Ebene nach einerlei Sinne, etwa von der Rechten nach der Linken, gerechnet werden, und dass hiernach jede der Winkelgeschwindigkeiten n, n_1, ... als positiv oder negativ angesehen wird, jenachdem die Kreisbewegung, zu welcher sie gehört, nach links oder rechts um den Mittelpunkt des Kreises vor sich geht, sind die Winkel von OA, AA_1, A_1A_2, ... mit OB, welche znr Zeit T, $= \alpha$, α_1, α_2, ... waren, am Ende der Zeit t, $= \alpha + nt$, $\alpha_1 + n_1 t$, $\alpha_2 + n_2 t$, etc. Man setze die letztern, der Kürze willen, $= \lambda$, λ_1, λ_2, ...

Seien nun B, B_1, B_2, ... die Projectionen der Oerter, in denen sich A, A_1, A_2, ... zur Zeit t befinden, auf OB oder die Axe der x, und C, C_1, C_2, ... die Projectionen derselben Oerter auf die Axe der y, deren positive Richtung übrigens so bestimmt sei, dass sie mit der Axe der x einen Winkel von 90°, nicht von 270°, bilde. Alsdann ist ersichtlich

$$OB = a \cos\lambda,\ BB_1 = a_1 \cos\lambda_1,\ B_1B_2 = a_2 \cos\lambda_2, \ldots$$
$$OC = a \sin\lambda,\ CC_1 = a_1 \sin\lambda_1,\ C_1C_2 = a_2 \sin\lambda_2, \ldots$$

Hiermit aber sind zugleich die gesuchten Coordinaten von A, A_1, ... gefunden. Es ist nämlich bei gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen:

$$x = OB = a \cos\lambda,$$
$$y = OC = a \sin\lambda;$$
$$x_1 = OB_1 = OB + BB_1 = a \cos\lambda + a_1 \cos\lambda_1,$$
$$y_1 = OC_1 = OC + CC_1 = a \sin\lambda + a_1 \sin\lambda_1;$$
$$x_2 = OB_2 = OB_1 + B_1B_2 = a \cos\lambda + a_1 \cos\lambda_1 + a_2 \cos\lambda_2,$$
$$y_2 = OC_2 = OC_1 + C_1C_2 = a \sin\lambda + a_1 \sin\lambda_1 + a_2 \sin\lambda_2;$$

u. s. w. u. s. w.

Zusätze. *a*. Durch die erhaltenen Formeln wird zugleich die Bewegung der Körper dargestellt, da man nach ihnen, nachdem darin für λ, λ_1, ... ihre durch t ausgedrückten Werthe substituirt worden, die Oerter der Körper für jeden Zeitpunkt berechnen kann.

Eliminirt man t aus den Formeln für die zwei Coordinaten eines Körpers, so erhält man die Gleichung für die vom Körper beschriebene Bahn. So führt die Elimination von t aus den Gleichungen $x = a \cos(\alpha + nt)$ und

$y = a \sin(\alpha + nt)$ zu der Gleichung $xx + yy = aa$, die, wie gehörig, dem Kreise zukömmt, der von A um O beschrieben wird.

Ein anderes nicht minder einfaches Beispiel gewährt die Annahme, dass sich der Körper A_1 um A mit einer Winkelgeschwindigkeit bewegt, die derjenigen, mit welcher sich A um O bewegt, gleich und entgegengesetzt ist, dass also $n_1 = -n$ ist. Da bei einer solchen Bewegung der Winkel OAA_1 nach und nach alle möglichen Werthe annimmt, so wollen wir der Einfachheit willen setzen, dass für $t = 0$, OA und AA_1 einerlei Richtung, und zwar die der festen Linie OR, haben. Dies giebt $\alpha = \alpha_1 = 0$, folglich $\lambda = nt$, $\lambda_1 = -nt$ und

$$x_1 = a \cos nt + a_1 \cos nt,\ y_1 = a \sin nt - a_1 \sin nt.$$

Hieraus fliesst nach Elimination von t:

$$\frac{x_1^2}{(a + a_1)^2} + \frac{y_1^2}{(a - a_1)^2} = 1.$$

A_1 beschreibt demnach unter der gemachten Annahme eine Ellipse, welche O zum Mittelpunkte hat, und von welcher die halbe grosse Axe $= a + a_1$, die halbe kleine $= a - a_1$ ist.

b. Die zu dem von A beschriebenen Kreise hinzugesetzten Kreise, in denen sich die folgenden Körper $A_1, A_2, \ldots$, jeder um den vorhergehenden, als Mittelpunkt, bewegen, nennt man Epicykeln, und hiernach die absoluten Bahnen dieser Körper Epicykloiden. Je mehr Kreisbewegungen man zu einer solchen epicyklischen Bewegung zusammensetzt, desto grösser wird die Anzahl der von einander unabhängigen constanten Grössen, und desto mehr wird man die Bewegung des den letzten Kreis beschreibenden Körpers nach seiner Willkühr bestimmen können, wenn es frei steht, jene Grössen nach Belieben anzunehmen. Auch lässt sich in der That zeigen, dass auf solche Weise jede beliebige Bewegung, wenigstens jeder innerhalb eines endlichen Zeitraumes vor sich gehende Theil derselben, so nahe, als man will, dargestellt werden kann.

§. 29.

Aufgabe. Die beschleunigenden Kräfte zu bestimmen, durch welche die epicyklischen Bewegungen der Körper A_1, A_2, ... hervorgebracht werden.

Auflösung. Die auf den Körper A bei seiner Kreisbewegung um O wirkende Kraft ist $= n^2 a$ und hat die Richtung AO (§. 22.). Eben so würde auf den Körper A_1 zufolge seiner relativen Bewegung um A, wenn A in Ruhe wäre, eine Kraft $= n_1{}^2 a_1$ nach der Richtung $A_1 A$ wirken. Es ist aber die absolute Bewegung von A_1 aus der absoluten Bewegung von A und aus der relativen von A_1 gegen A zusammengesetzt (§. 5. *b.*) und wird daher (§. 24.) von einer mit AO parallelen Kraft $n^2 a$ und der nach $A_1 A$ gerichteten Kraft $n_1{}^2 a_1$ in Vereinigung hervorgebracht. Auf gleiche Art sind es diese zwei auf A_1 wirkenden Kräfte, parallel mit sich an den dritten Körper A_2 verlegt, und ausserdem noch die zur relativen Bewegung von A_2 um A_1 nöthige nach A_1 gerichtete Kraft $n_2{}^2 a_2$, wodurch die absolute Bewegung von A_2 erzeugt wird; u. s. w.

Man substituire nun für jede dieser Kräfte die zwei, welche man erhält, wenn man sie parallel mit den Axen der x und der y zerlegt. Auf solche Weise reduciren sich alle auf einen der Körper wirkenden Kräfte auf zwei, mit den beiden Axen parallele, indem man für alle nach einer und derselben Axe wirkende Kräfte eine einzige setzen kann, welche ihrer Summe gleich ist.

Es sind aber zur Zeit t die Winkel von OA, AA_1, ... mit der Axe der x, $= \lambda$, λ_1, ...; also die Winkel der entgegengesetzten Richtungen AO, $A_1 A$, ... mit derselben Axe, $= \lambda + 180^0$, $\lambda_1 + 180^0$, etc. Wenn man daher die Kräfte $n^2 a$, $n_1{}^2 a_1$, ..., welche zur Zeit t die letztgedachten Richtungen haben, nach den Axen der x und der y zerlegt, so erhält man: $n^2 a \cos(\lambda + 180^0)$ und $n^2 a \sin(\lambda + 180^0)$, d. i. $-n^2 a \cos\lambda$ und $-n^2 a \sin\lambda$; $-n_1{}^2 a_1 \cos\lambda_1$ und $-n_1{}^2 a_1 \sin\lambda$; u. s. w. Setzt man also noch die gesuchten Kräfte, welche zur Zeit t auf die Körper A, A_1, A_2, ...

nach den Richtungen der beiden Axen wirken, resp. $= X$ und Y, X_1 und Y_1, X_2 und Y_2, etc. so ist

$$X = -n^2 a \cos\lambda,$$
$$Y = -n^2 a \sin\lambda;$$
$$X_1 = -n^2 a \cos\lambda - n_1^2 a_1 \cos\lambda_1,$$
$$Y_1 = -n^2 a \sin\lambda - n_1^2 a_1 \sin\lambda_1;$$
$$X_2 = -n^2 a \cos\lambda - n_1^2 a_1 \cos\lambda_1 - n_2^2 a_2 \cos\lambda_2,$$
$$Y_2 = -n^2 a \sin\lambda - n_1^2 a_1 \sin\lambda_1 - n_2^2 a_2 \sin\lambda_2;$$

u. s. w. u. s. w.

§. 30.

Die in den zwei vorigen §§. erhaltenen Resultate lassen sich folgendergestalt in Einem zusammenfassen:

Bewegt sich ein Körper M in einer Ebene dergestalt, dass in Bezug auf zwei sich rechtwinklig schneidende Axen seine Coordinaten

$$x = a\cos\lambda + a_1\cos\lambda_1 + a_2\cos\lambda_2 + \ldots$$
$$y = a\sin\lambda + a_1\sin\lambda_1 + a_2\sin\lambda_2 + \ldots$$

sind, wo a, a_1, a_2, ... Linien von constanter Länge und λ, λ_1, λ_2, ... der Zeit proportional sich ändernde Winkel bedeuten, so ist die ihn beschleunigende Kraft aus den zwei mit den Axen der x und der y parallelen Kräften

$$X = -n^2 a\cos\lambda - n_1^2 a_1\cos\lambda_1 - n_2^2 a_2\cos\lambda_2 - \ldots$$
$$Y = -n^2 a\sin\lambda - n_1^2 a_1\sin\lambda_1 - n_2^2 a_2\sin\lambda_2 - \ldots$$

zusammengesetzt, wobei n, n_1, n_2, ... die Geschwindigkeiten sind, mit denen sich die Winkel λ, λ_1, λ_2, ... ändern.

Sehr einfach gelangt man zu diesem Resultate auch durch die Betrachtung, dass die Bewegung des Körpers aus den zwei durch die Formeln für x und y dargestellten, in den Axen der x und y vor sich gehenden, Bewegungen zusammengesetzt ist, dass die Bewegung in der einen, wie in der andern Axe, aus den Bewegungen, welche durch die einzelnen Glieder $a\cos\lambda$, ... und $a\sin\lambda$, ... ausgedrückt werden, zusammengesetzt ist, und dass die Kräfte, welche die letztern Bewegungen erzeugen, nach §. 21. 2. $= -nna \cos\lambda$, ... und $-nna\sin\lambda$, ... sind.

§. 31.

Wegen der bald folgenden astronomischen Anwendungen wollen wir den Ort des sich in einer Ebene bewegenden Körpers M, statt ihn, wie vorhin, durch rechtwinklige Coordinaten anzugeben, durch Polarcoordinaten bestimmen, nämlich durch seinen Abstand $r, = OM$, von dem festen Punkte O und durch den Winkel $l, = ROM$, dieser Abstandslinie mit der festen Linie OR, von welcher an die Winkel $\alpha, \alpha_1, \ldots$ $\lambda, \lambda_1, \ldots$ gerechnet wurden. Hiermit wird $x = r \cos l$ und $y = r \sin l$. Eben so kommt, wenn wir statt der Kräfte X und Y die aus ihnen zusammengesetzte Kraft selbst einführen, dieselbe $= P$ und den Winkel ihrer Richtung mit $OR, = \varphi$ setzen: $X = P \cos \varphi$ und $Y = P \sin \varphi$. Die Formeln für die Bewegung und für die sie erzeugende Kraft werden damit:

$$(1)\quad r \cos l = a \cos \lambda + a_1 \cos \lambda_1 + \ldots,$$

$$(2)\quad r \sin l = a \sin \lambda + a_1 \sin \lambda_1 + \ldots,$$

$$(3)\quad P \cos \varphi = -n^2 a \cos \lambda - n_1{}^2 a_1 \cos \lambda_1 - \ldots,$$

$$(4)\quad P \sin \varphi = -n^2 a \sin \lambda - n_1{}^2 a_1 \sin \lambda_1 - \ldots.$$

Wenden wir diese Formeln auf das in §. 28. *a.* beigebrachte Beispiel einer elliptischen Bewegung an, welche aus zwei einander entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt war, so kommt, weil dabei $n_1 = -n$ und a_2, $a_3, \ldots = 0$ ist:

$$P \cos \varphi = -n^2 (a \cos \lambda + a_1 \cos \lambda_1) = -n^2 r \cos l,$$

$$P \sin \varphi = -n^2 (a \sin \lambda + a_1 \sin \lambda_1) = -n^2 r \sin l,$$

folglich $\varphi = l$ und $P = -n^2 r$, d. h. die Kraft ist nach dem Mittelpunkte O der Ellipse gerichtet und dem Abstande des Körpers von demselben proportional.

§. 32.

Um die Gleichungen (1), .. (4) auf eine für ihren fernern Gebrauch noch passendere Form zu bringen, addire man (1) und (2), nachdem man vorher (1) mit $\cos l$ und (2) mit $\sin l$ multiplicirt hat. Man subtrahire hierauf (1) von (2), nachdem (1) mit $\sin l$ und (2) mit $\cos l$ multiplicirt

4*

worden. Dies giebt an der Stelle von (1) und (2) die Gleichungen:

$$(a)\ r = a\cos(\lambda - l) + a_1 \cos(\lambda_1 - l) + \ldots,$$
$$(b)\ 0 = a\sin(\lambda - l) + a_1 \sin(\lambda_1 - l) + \ldots.$$

Behandelt man ganz auf dieselbe Weise die Gleichungen (3) und (4), so kommt an deren Statt:

$$(c)\ T = -n^2 a\cos(\lambda - l) - n_1{}^2 a_1 \cos(\lambda_1 - l) - \ldots,$$
$$(d)\ V = -n^2 a\sin(\lambda - l) - n_1{}^2 a_1 \sin(\lambda_1 - l) - \ldots,$$

wo T und V für $P\cos(\varphi - l)$ und $P\sin(\varphi - l)$ geschrieben worden. Weil $\varphi - l$ ersichtlich der Winkel ist, den die Kraft P mit dem Radius r macht, so sind T und V die Projectionen von P auf r und auf eine Linie, welche in der Ebene der Bewegung mit r einen Winkel von 90^0 bildet, oder es sind die zwei Kräfte, welche durch Zerlegung von P nach diesen zwei Richtungen erhalten werden.

Uebrigens kann man die Gleichungen (a) .. (d) aus (1) .. (4) sehr einfach auch dadurch ableiten, dass man die willkührlich durch O zu legende Axe der x, welche vorher mit der festen Linie OR zusammenfiel, jetzt mit derselben einen Winkel $= l$ machen lässt. Denn dadurch werden die Winkel, welche r, a, a_1, ... und die Richtung von P mit der Axe der x bilden, sämmtlich um l kleiner, gehen also aus l, λ, λ_1, ... φ über in 0, $\lambda - l$, $\lambda_1 - l$, ... $\varphi - l$, und die Gleichungen (1) .. (4) verwandeln sich in (a) .. (d).

§. 33.

Die himmlischen Bewegungen, mit denen wir uns beschäftigen werden, sind insgesammt sehr nahe kreisförmig und sehr nahe gleichförmig. Die bisher betrachtete epicyklische Bewegung des Körpers M wird aber eine solche sein, wenn gegen den einen der Halbmesser a, a_1, a_2, ..., es sei a, alle übrigen sehr klein, und damit $\frac{a_1}{a}$, $\frac{a_2}{a}$, ... sehr kleine Brüche sind. Denn alsdann wird sich der Körper M vom Punkte A, der um O in der Entfernung a mit der constanten Winkelgeschwindigkeit n einen Kreis beschreibt, nie weit entfernen können, — höchstens um $a_1 + a_2 + \ldots$, —

und es werden daher die Coordinaten r und l des Körpers M von denen a und λ des Punktes A nie sehr verschieden sein.

Für unsere nächsten Bedürfnisse können und wollen wir jene Brüche so klein annehmen, dass ihre Quadrate und höhern Potenzen, so wie ihre Producte in einander, ganz vernachlässigt werden können. Bezeichnen wir die Brüche der Reihe nach mit f_1, f_2, ..., setzen also $a_1 = af_1$, $a_2 = af_2$, etc. und eliminiren damit a_1, a_2, ... zunächst aus den Gleichungen (a) und (b) für die Bewegung des Körpers, so kommt:

$$r = a\cos(\lambda - l) + af_1\cos(\lambda_1 - l) + af_2\cos(\lambda_2 - l) + \ldots,$$
$$0 = \sin(\lambda - l) + f_1\sin(\lambda_1 - l) + f_2\sin(\lambda_2 - l) + \ldots.$$

Zu Folge der zweiten dieser Gleichungen ist $\sin(\lambda - l)$ ein Bruch von derselben Kleinheit, wie f_1, f_2, ... Man kann daher, mit Vernachlässigung von $\sin(\lambda - l)^2$, $\sin(\lambda - l)^3$, ..., statt $\sin(\lambda - l)$ und $\cos(\lambda - l)$ resp. $\lambda - l$ und 1 schlechthin setzen. Da es ferner auch gestattet sein muss, die Producte aus $\lambda - l$ in f_1, f_2, ... wegzulassen, und weil $f_1\sin(\lambda_1 - l)$

$$= f_1\sin[\lambda_1 - \lambda + (\lambda - l)] = f_1\sin(\lambda_1 - \lambda)\cos(\lambda - l)$$
$$+ f_1\cos(\lambda_1 - \lambda)\sin(\lambda - l),$$

so kann man $f_1\sin(\lambda_1 - \lambda)$ statt $f_1\sin(\lambda_1 - l)$ setzen, und eben so auch in den übrigen Producten $f_1\cos(\lambda_1 - l)$, $f_2\sin(\lambda_2 - l)$, etc. statt l überall λ schreiben. Man erhält somit:

$$(a') \quad r = a + af_1\cos(\lambda_1 - \lambda) + af_2\cos(\lambda_2 - \lambda) + \ldots,$$
$$(b') \quad l = \lambda + f_1\sin(\lambda_1 - \lambda) + f_2\sin(\lambda_2 - \lambda) + \ldots,$$

zwei Gleichungen, welche die Polarcoordinaten r und l des Körpers, unmittelbar durch die Constanten a, f_1, f_2, ..., und durch die der Zeit proportional wachsenden Winkel λ, λ_1, λ_2, ... ausgedrückt, geben.

Auf dieselbe Art, wie (a) und (b), reduciren sich die Formeln (c) und (d) für die beschleunigende Kraft auf:

$$(c') \quad T = -n^2a - n_1^2af_1\cos(\lambda_1 - \lambda) - n_2^2af_2\cos(\lambda_2 - \lambda) - \ldots,$$
$$V = -n^2a(\lambda - l) - n_1^2af_1\sin(\lambda_1 - \lambda) - \ldots,$$

oder, wenn man für die Differenz $\lambda - l$ ihren Werth aus (b') substituirt:

(d') $V = -(n_1{}^2 - n^2)\,af_1 \sin(\lambda_1 - \lambda) - (n_2{}^2 - n^2)\,af_2 \sin(\lambda_2 - \lambda) \ldots$

Um diese Formeln etwas einfacher darzustellen, setze man die Winkeldifferenzen $\lambda_1 - \lambda = \lambda'$, $\lambda_2 - \lambda = \lambda''$, etc. Diese neuen Winkel λ', λ'', ... verändern sich gleichfalls der Zeit proportional, und zwar mit den Geschwindigkeiten $n_1 - n$, $n_2 - n$, etc., welche man $= n'$, n'', ... setze. Mit Einführung dieser neuen Winkel und ihrer Geschwindigkeiten verwandrln sich $(a') \ldots (d')$ in:

(a'') $r = a + af_1 \cos\lambda' + af_2 \cos\lambda'' + \ldots,$
(b'') $l = \lambda + f_1 \sin\lambda' + f_2 \sin\lambda'' + \ldots,$
(c'') $T = -n^2 a - (n+n')^2 af_1 \cos\lambda' - (n+n'')^2 af_2 \cos\lambda'' - \ldots,$
(d'') $V = -(2nn' + n'^2)\,af_1 \sin\lambda' - (2nn'' + n''^2)\,af_2 \sin\lambda'' - \ldots.$

§. 34.

Die zuletzt erhaltenen Formeln $(a'') \ldots (d'')$ können folgendergestalt auf eine noch etwas allgemeinere Form gebracht werden. Man setze $\lambda'' = -\lambda'$, also auch $n'' = -n'$. Dies giebt:

$$r = a + a\,(f_1 + f_2) \cos\lambda' + \ldots,$$
$$l = \lambda + (f_1 - f_2) \sin\lambda' + \ldots,$$
$$T = -n^2 a - [(n+n')^2 f_1 + (n-n')^2 f_2]\; a \cos\lambda' - \ldots,$$
$$V = -[(2nn' + n'^2)\, f_1 + (2nn' - n'^2)\, f_2]\; a \sin\lambda' - \ldots;$$

folglich, wenn man noch $f_1 + f_2 = f'$ und $f_1 - f_2 = g'$ setzt:

$$(A)\;\begin{cases} r = a + af' \cos\lambda' + \ldots, \\ l = \lambda + g' \sin\lambda' + \ldots. \end{cases}$$

$$(B)\;\begin{cases} T = -n^2 a - [(n^2 + n'^2)\, f' + 2nn' g']\; a \cos\lambda' - \ldots, \\ V = -[2nn' f' + n'^2 g']\; a \sin\lambda' - \ldots. \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise kann man in den Reihen $(a'') \ldots (d'')$ die weiter folgenden Glieder paarweise vereinigen und man gelangt dadurch zu dem Resultate: dass eine nahe kreisund gleichförmige durch die Polarcoordinaten

$$r = a + af' \cos\lambda' + af'' \cos\lambda'' + \ldots$$
$$l = \lambda + g' \sin\lambda' + g'' \sin\lambda'' + \ldots$$

gegebene Bewegung durch eine Kraft erzeugt wird, die, wenn man sie nach der Richtung von r und perpendikular darauf

im Sinne der Bewegung zerlegt, bis auf die ersten Potenzen der kleinen Brüche f', g', f'', g'', ... genau die Kräfte

$$T = -n^2 a - F'a \cos \lambda' - F''a \cos \lambda'' - \ldots$$
$$V = -G'a \sin \lambda' - G''a \sin \lambda'' - \ldots$$

giebt, worin F'' und G'' eben so von f'', g'', n und n'' (der Geschwindigkeit, mit der sich der Winkel λ'' ändert), wie F' und G' zu Folge der Formeln (*B*) von f', g', n und n', abhängen; u. s. w.

Zusatz. Die in den Reihen für r und l vorangestellten Glieder a und λ drücken eine gleichförmige Kreisbewegung aus. Während von diesen ersten Gliedern, welche zugleich die bei weitem beträchtlichsten sind, das eine a constant bleibt und das andere λ der Zeit proportional wächst, nehmen die beiderseits hinzugesetzten Glieder im Verlaufe der Zeit periodisch ab und zu. Insbesondere wird durch die auf a folgenden Glieder die Abweichung von der Kreisform und durch die auf λ folgenden die Ungleichförmigkeit der Bewegung dargestellt. So kann sich der Körper zu Folge des Gliedes $af' \cos \lambda'$ bis zu einer Linie $= af'$ auf die eine und die andere Seite vom Kreise entfernen, und erscheint von O aus zu Folge des Gliedes $g' \sin \lambda'$ bis auf einen Winkel $= g'$ bald vor bald hinter dem Orte, den er bei einer gleichförmigen Bewegung in seiner Bahn einnehmen würde. Beiderlei Abweichungen aber hängen dergestalt zusammen, dass, wenn die eine von ihnen ihren grössten Werth hat, die andere am kleinsten ist, und umgekehrt. Vermöge der Glieder $af' \cos \lambda'$ und $g' \sin \lambda'$ bewegt sich daher der Körper um den durch a und λ allein bestimmten sogenannten mittlern Ort in einer kleinen Ellipse, von deren zwei Hauptaxen die eine, $= 2af'$, in die jedesmalige Lage des Halbmessers a fällt, die andere, $= 2ag'$, perpendikular auf demselben ist. Die Zeit, in welcher diese Ellipse beschrieben wird, oder die Periode der durch die genannten Glieder bewirkten Ungleichheit, ist $= 2\pi : n'$. Mit dieser Ungleichheit verbindet sich eine zweite von derselben Natur, welche durch die nächstfolgenden Glieder $af'' \cos \lambda''$ und $g'' \sin \lambda''$ dargestellt wird; mit dieser eine dritte, u. s. w.

Hinsichtlich der Reihen für T und V kann man bemerken, dass für $f', g', \ldots = 0$, d. i. bei der gleichförmigen Kreisbewegung, sich T und V auf $-n^2 a$ und 0 reduciren und damit, wie gehörig, eine constante nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtete Kraft ausdrücken; und dass, wenn $f', g', \ldots$ nicht null sind, wegen jedes Paares zusammengehöriger Glieder in den Reihen für r und l ein entsprechendes Paar von Gliedern in den Reihen für T und V hinzutritt, wodurch jene constante Kraft sowohl ihrer Richtung als ihrer Stärke nach in Perioden von derselben Dauer, wie bei der periodisch ungleichen Bewegung, etwas Weniges geändert wird.

§. 35.

Die Geschwindigkeiten von $\cos\lambda'$, $\sin\lambda'$, $\cos\lambda''$, ... sind nach §. 14. I. und II. resp. $= -n' \sin\lambda'$, $n' \cos\lambda'$, $-n'' \sin\lambda''$, ..., und folglich nach den Formeln (1) und (1*) in §. 11. die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Polarcoordinaten $r = a + af' \cos\lambda' + \ldots$ und $l = \lambda + g' \sin\lambda' + \ldots$ ändern:

$$(C) \begin{cases} r' = -a\,[n'f' \sin\lambda' + n''f'' \sin\lambda'' + \ldots] \\ l' = n + n'g' \cos\lambda' + n''g'' \cos\lambda'' + \ldots \end{cases}$$

Nicht selten wird auch die Geschwindigkeit in Betracht gezogen, mit welcher sich die vom Radius r beschriebene Fläche ändert. Um diese Geschwindigkeit — wir wollen sie $= \frac{1}{2}c$ setzen — ganz allgemein, nicht bloss für eine nahe kreis- und gleichförmige Bewegung, zu bestimmen, sei AB (Fig. 19.) der vom Körper während des auf t folgenden Zeitelements durchlaufene Weg. Weil gleichzeitig die von r, $= OA$, beschriebene Fläche um das Dreieck OAB wächst, so ist, wenn m Zeitelemente die Zeiteinheit ausmachen, die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c = m \,.\, OAB$, eben so wie das $m$fache des Winkels AOB die Winkelgeschwindigkeit l' ausdrückt.

Man beschreibe aus O mit OA und OB Kreisbögen, welche OB und OA in C und D schneiden, so ist AC

= dem mit OA oder r multiplicirten Winkel AOB, also $m \,.\, AC = rl'$. Wegen der unendlichen Kleinheit von AOB kann aber das Viereck $ACBD$ als ein geradliniges Rechteck angesehen werden, und es ist folglich das Dreieck $OAB = \frac{1}{2} OA \,.\, DB = \frac{1}{2} r \,.\, AC$, mithin $m \,.\, OAB = \frac{1}{2} r \,.\, m \,.\, AC$, d. i.

$$c = rrl'.$$

Die Geschwindigkeit endlich, mit welcher der Körper in der Bahn selbst fortgeht, und welche u heisse, ist $= m \,.\, AB = \sqrt{(m^2 \,.\, CB^2 + m^2 \,.\, AC^2)}$. Es ist aber $m \,.\, CB = m\,(OB - OA) =$ der Geschwindigkeit, mit welcher sich r ändert, $= r'$, und $m \,.\, AC = rl'$; folglich

$$u = \sqrt{(r'^2 + r^2 l'^2)}.$$

§. 36.

Im Folgenden wird es einigemal nöthig sein, bei Herleitung der Kräfte T und V aus den für r und l gegebenen Reihen auch noch die Quadrate der kleinen Brüche f', g', f'', g'', ... und ihre Producte in einander zu berücksichtigen. In solchen Fällen, wo die vorhin gegebenen Formeln (B) nicht ausreichen, besteht das einfachste Verfahren darin, dass man zuerst aus den Reihen für r und l ihre Geschwindigkeiten r' und l', und von r' und l' abermals die Geschwindigkeiten r'' und l'' entwickelt, indem von diesen Geschwindigkeiten die Kräfte T und V auf eine sehr einfache Weise abhängen, welches auch die Bewegung des Körpers sein mag.

Um diese Abhängigkeit zu finden, gehen wir zu den streng richtigen Formeln in §. 32.

$$(a)\quad r = a \cos(\lambda - l) + a_1 \cos(\lambda_1 - l) + \ldots,$$
$$(b)\quad 0 = a \sin(\lambda - l) + a_1 \sin(\lambda_1 - l) + \ldots,$$
$$(c)\quad T = -n^2 a \cos(\lambda - l) - n_1^2 a_1 \cos(\lambda_1 - l) - \ldots,$$
$$(d)\quad V = -n^2 a \sin(\lambda - l) - n_1^2 a_1 \sin(\lambda_1 - l) - \ldots$$

zurück. Weil n die Geschwindigkeit von λ, l' die von l, also $n - l'$ die von $\lambda - l$, und folglich (§. 14. Zus.) $-(n - l') \sin(\lambda - l)$ die von $\cos(\lambda - l)$, etc. ist, so ist die

aus (*a*) abgeleitete Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten der darin enthaltenen Veränderlichen:

$$r' = -(n - l')\, a \sin(\lambda - l) - (n_1 - l')\, a_1 \sin(\lambda_1 - l) - \ldots,$$

welche sich wegen (*b*) auf

$$(e)\ r' = -\, na \sin(\lambda - l) - n_1 a_1 \sin(\lambda_1 - l) - \ldots$$

reducirt. Eben so folgt aus (*b*):

$$0 = (n - l')\, a \cos(\lambda - l) + (n_1 - l')\, a_1 \cos(\lambda_1 - l) + \ldots, \text{ d. i.}$$

$$(f)\ rl' = na \cos(\lambda - l) + n_1 a_1 \cos(\lambda_1 - l) + \ldots,$$

wegen (*a*). Verfährt man auf gleiche Weise mit (*e*) und (*f*), so kommt:

$$r'' = -n(n - l')\, a \cos(\lambda - l) - n_1(n_1 - l')\, a_1 \cos(\lambda_1 - l) - \ldots$$
$$= T + rl'^2, \text{ wegen } (c) \text{ und } (f);$$

$$(rl')' = -n(n - l)\, a \sin(\lambda - l) - n_1(n_1 - l')\, a_1 \sin(\lambda_1 - l) - \ldots$$
$$(\alpha) \ldots = V - r'l', \text{ wegen } (d) \text{ und } (e).$$

Hiernach, und weil $(rl')'$, oder die Geschwindigkeit von rl', $= r'l' + rl''$ ist (§. 11. 2*), hat man zuletzt

$$(D)\quad T = r'' - rl'^2 \text{ und } V = 2r'l' + rl'',$$

als die gesuchten Ausdrücke von *T* und *V*. Auch werden diese Formeln, obschon bloss aus der Theorie der zusammengesetzten Kreisbewegung hergeleitet, dennoch allgemeine Gültigkeit haben, da jede Bewegung in einer Ebene als aus gleichförmigen Kreisbewegungen zusammengesetzt angesehen werden kann (§. 28. *b*.).

§. 37.

Zusätze. *a*. Zwischen der auf dem Radius *r* perpendikularen Kraft *V* und der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}c'$ der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ findet eine sehr einfache Beziehung statt. Nach §. 35. ist nämlich $c = r \,.\, rl'$; von $r \,.\, rl'$ ist aber die Geschwindigkeit $= r\,(rl')' + r' \,.\, rl' = rV$ (voriger §. (α)); mithin

$$c' = rV.$$

Es folgt hieraus weiter, dass, wenn $c' = 0$ ist, also die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ constant bleibt, dann auch $V = 0$ ist, und sich somit die Kraft *P* auf *T* allein reducirt, und

umgekehrt; oder deutlicher: *Bewegt sich ein Körper M in einer Ebene dergestalt, dass der Radius OM der Zeit proportionale Flächen beschreibt, so wirkt die Kraft in der Richtung des Radius; und umgekehrt: Wenn die Richtung der auf M wirkenden Kraft stets denselben festen Punkt O trifft, so (bewegt sich M in einer Ebene) und der Radius OM beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

So muss z. B. bei der aus zwei Kreisbewegungen zusammengesetzten elliptischen Bewegung (§. 28. *a.*), weil bei ihr die Kraft stets nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtet ist (§. 31.), die Flächengeschwindigkeit in Bezug auf denselben Punkt constant sein. Es geschieht daher diese Bewegung nach dem nämlichen Gesetze, wie die in §. 24. 2. betrachtete, so wie auch bei beiden Bewegungen die Kraft nach einem und demselben Gesetze wirkt.

b. Die Relation $c' = rV$ und die daraus gezogene merkwürdige Folgerung lassen sich auch leicht durch Construction erweisen. — Seien AB und BC (Fig. 20.) die in zwei auf einander folgenden und einander gleichen Zeitelementen, deren m auf die Zeiteinheit gehen, vom Körper beschriebenen Wege. Man vollende das Parallelogramm $ABCD$, so ist die in B den Körper treibende Kraft $\equiv mm \,.\, BD$; und wenn man von D auf OB das Perpendikel DE fällt, so ist $T \equiv mm \,.\, BE$ und $V \equiv mm \,.\, ED$. Ferner ist die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c = m \,.\, OAB$, und die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}c'$, mit der sich dieselbe ändert, $= m\,(m \,.\, OBC - m \,.\, OAB)$.

Es ist aber, wenn AD von BO in F und von einer durch C mit BO gezogenen Parallele in G getroffen wird, $DG = AF$, und daher das Dreieck

$$OBC = OBG = OBD + ODG + DBG,$$
$$OAB = OAF + ABF = ODG + DBG,$$

folglich $OBC - OAB = OBD$*) und damit $\frac{1}{2}c' = mm \,.\, OBD = \frac{1}{2}\,mm \,.\, ED \,.\, OB = \frac{1}{2}\,Vr$, wie zu beweisen war.

*) Wird von mehrern Dreiecken, welche in einer Ebene liegen und durch Nebeneinanderstellung der ihre Ecken bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt sind, jedes derselben, wie OAB, seinem Inhalte

Bleibt die Flächengeschwindigkeit ungeändert, ist also $OAB = OBC$, so wird $OBD = 0$, und es fällt der Punkt D, mithin auch die Richtung der Kraft, in den Radius. — Noch unmittelbarer erhellet dieses, wenn man in der Verlängerung von AB, $BH = AB$ (Fig. 20.*) macht, wodurch $OAB = OBH$ wird. Alsdann ist HC parallel mit der Richtung der Kraft in B (§. 19.), und bei constanter Flächengeschwindigkeit $OBC = OAB$, folglich auch $= OBH$, mithin HC mit BO parallel.

c. Die für T und V gefundenen allgemeinen Ausdrücke lassen sich noch auf mehrere andere Arten als richtig darthun. Folgender Beweis, den ich aber der Kürze wegen mehr nur andeuten, als ausführen, will, beruht auf einer geometrischen Betrachtung und scheint mir deshalb der Mittheilung werth, weil sich dadurch zugleich die Bedeutung der einzelnen Glieder von T und V zu erkennen giebt.

Haben O, A, B, C (Fig. 21.) dieselbe Bedeutung, wie vorhin. Man trage OA auf OB und OC von O bis D und E, und mache, von einem beliebigen Punkte F ausgehend, $FG \equiv DB$ und $FH \equiv EC$. Die Bewegung ABC ist somit in die zwei: ADE und FGH zerlegt, von denen die erstere in einem Kreise um O geschieht und die letztere auf der erstern normal ist. Heissen nun N und M die Normalkraft und die Tangentialkraft bei der Bewegung ADE; N_1 und M_1

---

nach positiv oder negativ genommen, je nachdem, von der in seinem Ausdrucke zuerst gesetzten Ecke O aus, die Richtung von der zweiten A nach der dritten B nach links z. B. oder nach rechts gehend erscheint, so gilt obige Gleichung, was auch der Punkt O für eine Lage gegen das Parallelogramm $ABCD$ haben mag, und kann, wenn man will, auch also geschrieben werden:

$$OBC + OBA = OBD.$$

Sie drückt unter dieser Form den bemerkenswerthen Satz aus: „Von drei Dreiecken in einer Ebene, welche eine gemeinschaftliche „Ecke O und zu gegenüberstehenden Seiten zwei anstossende Seiten „BC und BA, und die durch derselben gemeinschaftliche Ecke gehende „Diagonale BD eines Parallelogramms haben, ist die Summe der bei- „den ersten Dreiecke dem dritten gleich."

Siehe des Verf. Lehrbuch der Statik, §. 34.

dasselbe bei der Bewegung FGH, so sind es auch diese vier Kräfte, durch welche die aus ADE und FGH zusammengesetzte Bewegung ABC erzeugt wird; und zwar wird $T = N + M_1$ und $V = M + N_1$ sein. Es ist aber

$$N = -rl'^2,\ M_1 = r'',\ M = rl'',\ N_1 = 2r'l'.$$

Von der Richtigkeit der drei ersten dieser vier Gleichungen wird man sich ohne Schwierigkeit aus §. 23. überzeugen. Die vierte beruht auf dem leicht erweislichen Satze, dass bei jeder Bewegung die Normalkraft gleich der Geschwindigkeit des Körpers, multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit der durch ihn an die Bahn gelegten Tangente, ist. Bei der Bewegung FGH ist aber die Geschwindigkeit $= m\,.\,FG = m\,.\,DB = r'$, und die Winkelgeschwindigkeit der Tangente $= m\,.\,FG \wedge GH = 2m\,.\,BOC = 2l'$; denn es ist unendlich nahe $OC - OB = OB - OA$, folglich $EC = 2DB$, d. i. $FH = 2FG$, also $FG \wedge GH = KGH = 2F = 2BOC$.

§. 38.

Bis jetzt haben wir in diesem Kapitel nur solche Bewegungen in Betracht gezogen, welche in einer und derselben Ebene vor sich gehen. Wir wollen daher schliesslich noch bei einem sich beliebig im Raume bewegenden Körper die ihn treibende Kraft zu bestimmen suchen. Die vorigen Coordinaten x und y oder r und l mögen alsdann die Coordinaten des auf eine unbewegliche Ebene projicirten Körpers bedeuten. Sein Abstand von der Ebene zur Zeit t sei, analog mit den vorhergehenden Coordinatenausdrücken:

$$z = h' \sin\beta' + h'' \sin\beta'' + h''' \sin\beta''' + \ldots,$$

wo h', h'', h''', ... Linien von constanter Länge und β', β'', β''', ... der Zeit proportional sich ändernde Winkel vorstellen. Hiermit haben wir die Bewegung des Körpers in zwei zerlegt, von denen die eine in der unbeweglichen Ebene, die andere in einer diese Ebene rechtwinklig schneidenden Geraden geschieht. Nach §. 24. wird folglich die beschleunigende Kraft zusammengesetzt sein aus zwei Kräften, parallel und gleich den Kräften X und Y oder T und V, welche die Bewegung in der Ebene hervorbringen, und aus einer auf

der Ebene perpendikularen Kraft, welche die durch z ausgedrückte geradlinige Bewegung erzeugt. Es ist daher nur noch übrig, diese letztere Kraft, welche W heisse, zu bestimmen. Sie findet sich, wenn wir die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Winkel β', β'', ... ändern, resp. $= p'$, p'', ... setzen, nach der zu Ende des §. 30. gemachten Bemerkung:

$$W = -p'^2 h' \sin\beta' - p''^2 h'' \sin\beta'' - \ldots.$$

Zweiter Abschnitt.

Von den Kräften, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper hervorgebracht werden.

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Von der elliptischen Bewegung der Planeten.

§. 39.

Nachdem wir uns im vorigen Abschnitte mit den Grundlehren der Dynamik so weit, als es vor der Hand nöthig schien, bekannt gemacht haben, gehen wir jetzt zu dem Hauptgegenstande unserer Untersuchungen, zu der Anwendung jener Lehren auf die Bewegung der Himmelskörper, über. Die Gesetze, nach denen sich diese Bewegungen richten, sind, wenn wir einstweilen kleine dabei vorkommende Anomalieen unberücksichtigt lassen, sehr einfach und überall die nämlichen, was darauf hindeutet, dass auch die bei diesen Bewegungen thätigen Kräfte ein ganz einfaches und überall auf gleiche Weise statt findendes Gesetz befolgen werden. Die Entwickelung dieses Gesetzes und seiner nächsten Folgen ist der Zweck des gegenwärtigen Abschnittes.

Betrachten wir deshalb zuerst die Bewegungen der Planeten um die Sonne. Durch Beobachtungen und darauf gestützte Rechnungen hat KEPLER (geb. 1571, gest. 1630) gefunden:

1) dass jeder Planet eine Ellipse beschreibt, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet;

2) dass jeder Planet in seiner Ellipse dergestalt fortgeht, dass die von der Sonne bis zu ihm zu ziehende Gerade der Zeit proportionale Flächen überstreicht, und

3) dass die Quadrate der Umlaufszeiten je zweier Planeten sich wie die Würfel ihrer mittlern Entfernungen von der Sonne verhalten.

Diese drei Gesetze, welche die Grundlage der gesammten physischen Astronomie bilden, werden nach ihrem Entdecker die Kepler'schen Gesetze genannt.

Anmerkung. Die Sonne und die Planeten sind sehr nahe kugelförmig, und das jetzt von der gegenseitigen Bewegung dieser Kugeln Ausgesprochene ist, streng genommen, von der Bewegung ihrer Mittelpunkte zu verstehen. Indessen sind die Durchmesser dieser Kugeln gegen ihre Abstände von einander so gering, dass man erstere im Vergleich zu letzteren beinahe als physische Punkte ansehen kann. So ist der Durchmesser der Sonne 10mal grösser als der des grössten Planeten, Jupiters, und doch nur etwa der 42ste Theil ihrer Entfernung von dem ihr nächsten Planeten, Merkur; er ist aber kleiner als der 2000ste Theil des Abstandes der Sonne von dem entferntesten Planeten Uranus.

§. 40.

Die zwei Brennpunkte F und S (Fig. 22.) einer Ellipse sind bekanntlich zwei in der grossen Axe AP derselben auf entgegengesetzten Seiten und gleichweit vom Mittelpunkte M liegende und von den Endpunkten der kleinen Axe CD um die halbe grosse Axe entfernte Punkte, so dass z. B. $SC = MP$ ist. Sie besitzen die merkwürdige Eigenschaft, dass die Summe ihrer Abstände von irgend einem Punkte der Ellipse stets der grossen Axe gleich ist, — wie dies in Bezug auf die vier Endpunkte der beiden Axen aus der gegebenen Definition auf den ersten Blick folgt.

Der Bruch, welcher angiebt, der wievielste Theil der halben grossen Axe der Abstand eines der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkte ist, heisst die Excentricität. Bezeichnen wir dieselbe mit e und die halbe grosse Axe mit a, so ist $MS = ae$, und die halbe kleine Axe $MC = \sqrt{(SC^2 - MS^2)} = \sqrt{(a^2 - a^2 e^2)} = a\sqrt{1-e^2} = a\,(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \ldots)$, folglich der Unterschied zwischen beiden Axen, d. i. der Unterschied zwischen dem grössten und dem kleinsten Durchmesser der Ellipse, $= a\,(e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \ldots)$.

Alle Ellipsen, für welche die Excentricität e gleichen Werth hat, sind einander ähnlich; durch e wird daher die Form der Ellipse bestimmt. Je weniger e von 1 verschieden ist, desto länglicher ist die Ellipse, und je kleiner e ist,

desto mehr nähert sie sich einem Kreise, in den sie für $e = 0$ selbst übergeht.

§. 41.

Stelle die Ellipse der Figur die Bahn eines Planeten vor; im Brennpunkte S sei die Sonne. Von den zwei Endpunkten der grossen Axe ist alsdann der dem S näher liegende P zugleich derjenige Punkt der Bahn, in welchem der Planet der Sonne am nächsten kommt, und wird daher das Perihelium oder die Sonnennähe genannt. Befindet sich der Planet im andern Endpunkte A, so ist er am weitesten von der Sonne entfernt, weshalb der Punkt A das Aphelium oder die Sonnenferne heisst. Beide Punkte begreift man auch unter dem Namen der Apsiden und nennt die Linie AP, sobald man bloss ihre Lage, nicht ihre Länge berücksichtigt, die Apsidenlinie.

Die kleinste Entfernung des Planeten von der Sonne ist hiernach $SP = MP - MS = a\,(1 - e)$, die grösste $SA = MA + SM = a\,(1 + e)$, und daher die mittlere $= a =$ der halben grossen Axe. Zu Folge des vorigen §. befindet sich der Planet in dieser mittlern Entfernung, wenn er durch den einen oder andern Endpunkt der kleinen Axe geht.

§. 42.

Die Bahnen der Planeten sind so wenig excentrisch, dass die meisten von ihnen beim ersten Anblicke Kreise zu sein scheinen. Unter den Bahnen der älteren Planeten haben die des Merkur und des Mars die grösste Excentricität, nämlich $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{11}$; die grösste nach diesen, $= \frac{1}{18}$, hat die Bahn des Saturn. Hierauf folgen die Excentricitäten der Bahnen des Jupiter (und die ihr gleiche des Uranus), der Erde und der Venus, $= \frac{1}{21}$, $\frac{1}{60}$ und $\frac{1}{146}$. Durchschnittlich grösser sind sie bei den erst in diesem Jahrhunderte entdeckten Planeten Ceres, Pallas, Juno und Vesta, nämlich $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{11}$.

Bei dieser Kleinheit der Excentricitäten e wird es als erste Annäherung an die planetarischen Bewegungen hinreichen, wenn wir bloss die erste Potenz von e berücksichtigen, die zweite und höheren aber vernachlässigen.

Zunächst werden wir daher den Unterschied zwischen dem grössten und dem kleinsten Durchmesser einer elliptischen Bahn, $= ae^2 + \dots$ (§. 40.), unbeachtet lassen, und hiernach die Bahn als einen Kreis betrachten, welcher MA oder MC, $= a$, zum Halbmesser und M zum Mittelpunkte hat, von dem die Sonne S um die gegen a nur geringe Entfernung ae absteht. Dabei wird, wie im Vorigen, die Gerade MS die Bahn in dem der Sonne am nächsten und dem am fernsten liegenden Punkte, P und A, treffen.

§. 43.

Befinde sich der Planet in einem beliebigen Punkte L seiner Bahn. Die von der Sonne bis zu ihm gezogene Gerade SL heisst der **Radius Vector**, und der Winkel PSL, um welchen die von der Sonne nach dem Perihel zu ziehende Gerade SP nach dem Sinne der Bewegung des Planeten (in der Figur nach links) gedreht werden muss, bis sie mit dem Radius Vector zusammenfällt, die **wahre Anomalie** des Planeten. Diese beiden Stücke, die Polarcoordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne als Anfangspunkt und die Apsidenlinie als Grundlinie, wollen wir jetzt mit Weglassung der zweiten und höheren Potenzen von e (voriger §.) durch die Zeit t zu bestimmen suchen, die seit dem letzten Durchgange des Planeten durchs Perihel verflossen ist.

Man setze den Radius Vector $SL = r$, die wahre Anomalie $PSL = v$ und den Winkel $SLM = i$, und fälle von M auf SL das Perpendikel MN, so ist im Dreieck MNS, $MS = ae$, $MSN = v$, folglich

$$NM = ae \sin v,\ NS = ae \cos v.$$

Im Dreieck MNL aber, wo $ML = MP = a$ ist, hat man

$$NM = a \sin i,\ NL = a \cos i;\ \text{folglich}$$

$$\sin i = e \sin v \ \text{ und } \ a \cos i = ae \cos v + r.$$

Wegen der erstern dieser Gleichungen ist aber $\sin i$, eben so wie e, eine sehr kleine Zahl, deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Deshalb, und wenn man hier, wie im Folgenden, zur Einheit der Winkel denjenigen ($= 57^0, 296$, §. 14.) wählt, der von einem dem

Halbmesser gleichen Bogen gemessen wird, kann man statt jener zwei Gleichungen auch schreiben:

$$i = e \sin v \text{ und } a = ae \cos v + r, \text{ d. i.}$$

$$r = a\ (1 - e \cos v).$$

Nun überstreicht der Radius Vector während der Zeit t die Fläche SPL und während der Umlaufszeit, welche U heisse, die ganze Fläche der Bahn, d. i. die mit einem Halbmesser $= a$ beschriebene Kreisfläche $= \pi aa$. Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze muss sich daher verhalten

$$\text{Fläche } SPL : \pi aa = t : U.$$

Es ist aber der Winkel $PML = v - i = v - e \sin v$; folglich die Fläche $MPL = \frac{1}{2} aa\ (v - e \sin v)$. Die Fläche MSL ist $= \frac{1}{2} NM \,.\, SL = \frac{1}{2} ae \sin v \,.\, a\ (1 - e \cos v) = \frac{1}{2} aae \sin v$, und daher die Fläche $SPL = MPL - MSL = \frac{1}{2} aa\ (v - 2e \sin v)$. Hiermit wird die obige Proportion:

$$v - 2e \sin v : 2\pi = t : U.$$

Setzt man daher noch $2\pi : U = n$, wo also n die mittlere Bewegung des Planeten, d. i. die Winkelgeschwindigkeit des Radius Vector bedeutet, welche er haben würde, wenn er sich *gleichförmig*, in der Zeit U einmal, um die Sonne drehte, so wird

$$v - 2e \sin v = nt;$$

und hiermit lässt sich aus dem Winkel v die Zeit t finden, in welcher er beschrieben worden. Soll aber umgekehrt, wie gefordert wurde, aus der Zeit der Winkel berechnet werden, so hat man

$$v = nt + 2e \sin v = nt + 2e \sin (nt + 2e \sin v), \text{ d. i.}$$

$$(1) \quad v = nt + 2e \sin nt.$$

Eben so findet sich r, durch t ausgedrückt, $= a\,(1 - e \cos (nt + 2e \sin v))$ d. i.

$$(2) \quad r = a\,(1 - e \cos nt).$$

Dabei ist nt der Winkel, den der Radius Vector mit mittlerer Bewegung während der Zeit t beschreibt. Er wird, wenn, wie hier, die Zeit vom Durchgange durchs Perihel an gerechnet wird, die mittlere Anomalie und der da-

durch bestimmte Ort der mittlere Ort des Planeten genannt.

Der Unterschied zwischen der mittlern und wahren Anomalie oder der Unterschied zwischen dem mittlern und wahren Orte, also der Winkel $v - nt$, $= 2e \sin nt$, heisst die Mittelpunktsgleichung. Ihr grösster Werth ist $= \pm 2e$ und findet für $nt = 90^0$ und $= 270^0$, also in den beiden Mitten zwischen Perihel und Aphel, statt. Im Perihel und Aphel selbst aber fällt der wahre Ort mit dem mittlern zusammen, und die Mittelpunktsgleichung ist null.

Zusätze. *a*. Bei der gestatteten Vernachlässigung von $e^2, \ldots$ kann man auch setzen: $i = e \sin (v - i)$, d. i. der Winkel $MLS = e \sin SML$; und eben so ist, wenn man noch FL zieht: $MLF = e \sin FML$; folglich $FLM = MLS = i$ und $PFL = v - FLS = v - 2i = v - 2e \sin v = nt =$ der mittlern Anomalie. Der Winkel PFL wächst folglich der Zeit proportional, d. h. *die Bewegung, aus dem Brennpunkte betrachtet, in welchem die Sonne nicht steht, erscheint gleichförmig, sehr nahe wenigstens.*

Eine von S aus parallel mit FL gezogene Linie SA ist daher nach dem mittlern Orte gerichtet, und der Winkel $ASL = FLS =$ der Mittelpunktsgleichung.

b. Damit der Planet, von F aus betrachtet, sich gleichförmig zu bewegen scheine, muss seine wahre Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse ab- und zunehmen, in welchem er sich dem F nähert und von F entfernt. Sie ist folglich im Perihel am grössten, im Aphel am kleinsten, und ihr grösster Werth verhält sich zu ihrem kleinsten wie FP zu FA, d. i. wie $1 + e$ zu $1 - e$.

Anmerkung. Den Gleichungen (2) und (1) kann man auch die Formen geben:

$$r = a + \tfrac{3}{2} ae \cos (180^0 - \lambda) + \tfrac{1}{2} ae \cos (2\lambda - \lambda),$$
$$v = \lambda + \tfrac{3}{2} e \sin (180^0 - \lambda) + \tfrac{1}{2} e \sin (2\lambda - \lambda),$$

wo $\lambda = nt$ Vergleicht man diese Formen mit denen von r und l in §. 33. (a') und (b'), so sieht man, dass die Bewegung von L um S folgendergestalt sich epicyklisch darstellen lässt. Man lasse (Fig. 22*.) Q um S, O um Q und L um O in den Abständen $SQ = a$, $QO = \tfrac{3}{2} ae$ und $OL = \tfrac{1}{2} ae$ sich also drehen,

dass zur Zeit t die Winkel dieser Linien mit SP resp. $= nt$, 180^0 und $2nt$ sind; oder, was auf dasselbe hinauskommt: Man trage über M hinaus eine Linie SR ($\equiv QO$) $= \frac{3}{2} SM$ und lasse um R einen Punkt O in der mittlern Entfernung a mit der mittlern Bewegung n, und um O den Planeten L in einer Entfernung $= \frac{1}{3} SR$ mit dem Doppelten der mittlern Bewegung Kreise beschreiben, und dieses so, dass, wenn RO mit RP, auch OL mit RP einerlei Richtung hat.

Es ist dies genau dieselbe Construction, nach welcher Copernicus die Planeten sich um die Sonne bewegen lässt. Copern. de revolut. orbium coelest. lib. V. cap. 4. Die im vorigen Zusatz angegebene Construction, nach welcher L um M sich in einem Abstande $= a$ so bewegt, dass die Bewegung von F aus gleichförmig erscheint, gehört dem Ptolemäus an, nur dass dieser in S nicht die Sonne, sondern die Erde, ruhend annimmt. Almagest. lib IX. cap. 5. — Beide Astronomen haben daher die in Rede stehende Bewegung bis auf die erste Potenz der Excentricität genau dargestellt.

§. 44.

Die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne beträgt 365,256 Tage mittlere Zeit. Wird ein solcher Tag zur Messung der Zeit und die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, wie es gewöhnlich ist, zur Messung von Raumlängen genommen, so verhält sich nach dem dritten Kepler'schen Gesetze, wenn wir die Erde mit einem andern Planeten vergleichen, dessen mittlere tägliche Bewegung, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, $= n$, dessen Umlaufszeit folglich $= \frac{2 \,.\, 3{,}14159}{n}$ Tagen, und dessen mittlere Entfernung von der Sonne $= a$ ist:

$$(365{,}256)^2 : \left(\frac{2 \,.\, 3{,}14159}{n}\right)^2 = 1 : a^3.$$

Setzt man daher noch die Zahl

$$\frac{2 \,.\, 3{,}14159}{365{,}256} = 0{,}017202 = k,$$

so wird

$$a^3 n^2 = k^2,$$

wodurch man für jeden Planeten aus der einen der beiden Grössen a und n die andere finden kann.

§. 45.

Zur Grundlinie der Polarcoordinaten wollen wir jetzt, statt der in §. 43. hierzu angewendeten Apsidenlinie, eine beliebige andere in der Ebene der Bahn durch die Sonne S gelegte Gerade SB nehmen. Der Winkel, den die von S nach irgend einem Punkte in der Ebene der Bahn gezogene Gerade mit dieser neuen Grundlinie macht, heisse die Länge des Punktes und werde, wie im Vorigen, im Sinne der Bewegung des Planeten gerechnet. Hiernach ist BSP die Länge des Perihels, BSL die Länge des wahren Orts des Planeten oder die wahre Länge und, wenn A den mittlern Ort bezeichnet, BSA die mittlere Länge des Planeten. Setzt man diese drei Längen resp. $= \omega$, l und λ, so ist

$$l = BSP + PSL = \omega + \text{der wahren Anomalie},$$
$$\lambda = BSP + PSA = \omega + \text{der mittlern Anomalie}.$$

Die mittlere Länge wächst daher eben so, wie die mittlere Anomalie, der Zeit proportional, in jeder Zeiteinheit um einen Winkel $= n$.

Rechnet man ferner die Zeit t nicht von dem Durchgange des Planeten durch das Perihel, sondern von einem beliebigen andern Zeitpunkte an, welcher die Epoche heisst, und setzt man die mittlere Länge in der Epoche $= \varepsilon$, so ist, dem eben Bemerkten zufolge, die mittlere Länge zur Zeit t, $= \varepsilon + nt$, folglich die mittlere Anomalie $= \varepsilon + nt - \omega$, und damit die wahre (§. 43.)

$$v = \varepsilon + nt - \omega + 2e \sin(\varepsilon + nt - \omega).$$

Dies giebt für die Coordinaten die Ausdrücke:

$$r = a\,(1 - e\cos(\varepsilon + nt - \omega)),$$
$$l = \omega + v = \varepsilon + nt + 2e \sin(\varepsilon + nt - \omega),$$

Formeln, nach denen die Bewegungen aller Planeten auf einen gemeinsamen Anfangspunkt der Zeit und, dafern sie in einer und derselben Ebene geschehen, auf eine gemeinsame Grundlinie bezogen werden. Die Constanten, die deshalb für jeden Planeten besonders gegeben sein müssen, sind a, ε, e und ω, indem die Constante n auf die im vorigen §. besagte Weise durch a bestimmt ist.

§. 46.

Da jeder Planet sich in einer die Sonne mit enthaltenden Ebene bewegt, so werden die Ebenen je zweier Planetenbahnen, wenn sie nicht zusammenfallen, sich in einer durch die Sonne gehenden Geraden schneiden. Die Beobachtungen lehren, dass die Winkel, unter denen dieses geschieht, oder die gegenseitigen Neigungen der Bahnebenen, nur wenige Grade enthalten. Die Neigungen, welche gegen die Ebene der Erdbahn die Bahnen der älteren Planeten haben, sind am grössten bei Merkur und Venus, nämlich 7°,0 und 3°,4; bei Mars, Jupiter und Saturn sind sie 1°,9; 1°,3 und 2°,5; bei Uranus nur 0°,8. Bei den vier neuesten Planeten dagegen sind eben so, wie die Excentricitäten, auch die Neigungen gegen die Erdbahn bedeutend grösser, als bei den übrigen; sie betragen für Ceres, Pallas, Juno und Vesta resp. 10°,6; 34°,6; 13°,0 und 7°,1.

Ausserdem, dass die Bewegungen der Planeten insgesammt nahe kreisförmig sind und in nur wenig gegen einander geneigten Ebenen geschehen, haben sie auch noch dieses mit einander gemein, dass alle Planeten die Sonne nach einer und derselben Richtung umkreisen, einer Richtung, die, von der Nordseite der Bahnebenen beobachtet, von rechts nach links gehend erscheint.

§. 47.

Um die Verschiedenheit der Ebenen, in denen sich die verschiedenen Planeten um die Sonne bewegen, mit in Rechnung nehmen zu können, wollen wir alle diese Bewegungen auf eine und dieselbe beliebig durch die Sonne gelegte Grundebene und auf eine und dieselbe in dieser Ebene von der Sonne aus beliebig gezogene Grundlinie beziehen. Hiernach wird der Ort eines Planeten bestimmt sein, wenn nächst der Länge des Radius Vector der Winkel desselben mit der Grundebene oder, was dasselbe ist, mit seiner Projection auf die Grundebene, und der Winkel dieser Projection mit der Grundlinie gegeben sind. Letzteren Winkel nennt man die Länge des Planeten in der Grundebene; sie wird

eben so, wie in §. 45. die Länge in der Bahn, im Sinne der Bewegung des Planeten gezählt. Der Winkel, den der Radius Vector mit der Grundebene macht, heisst die Breite des Planeten; sie ist nördlich oder südlich, nachdem der Planet nord- oder südwärts von der Grundebene absteht.

Um nun für eine gegebene Zeit t die Länge in der Grundebene und die Breite des Planeten berechnen zu können, muss vor allem die Lage seiner Bahnebene gegen die Grundebene, also der Winkel oder die Neigung der erstern Ebene gegen die letztere und die Lage der Knotenlinie, d. i. des gegenseitigen Durchschnitts beider Ebenen, gegeben sein. Man nennt nämlich die zwei Punkte einer Planetenbahn, in denen sie von der Grundebene geschnitten wird, die Knoten der Bahn; denjenigen, in welchem der Planet von der südlichen auf die nördliche Seite der Bahn übergeht, den aufsteigenden, den andern den niedersteigenden Knoten. Beide Knoten, und die Sonne zwischen ihnen, liegen in dem Durchschnitte der Bahnebene mit der Grundebene, der deshalb die Knotenlinie heisst, und dessen Lage in der Grundebene durch die Länge des einen oder des andern Knoten — beide Längen sind um 180° verschieden — bestimmt ist.

Grösserer Anschaulichkeit willen denke man sich um die Sonne als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugelfläche beschrieben. Seien BC und KL (Fig. 23.) die zwei grössten Kreise dieser Fläche, in denen sie von der Grundebene und der Bahnebene geschnitten wird. Die zwei Punkte, in denen diese Kreise einander schneiden, sind einerlei mit denen, in welchen die Knotenlinie die Kugelfläche trifft, sind also die von der Sonne aus auf die Fläche projicirten Knoten oder die sphärischen Oerter der Knoten. Sei K der sphärische Ort des aufsteigenden Knoten. Trifft nun die in der Grundebene von der Sonne aus gezogene Grundlinie die Fläche im Punkte B des Kreises BC, so wird durch den Bogen BK die Länge des aufsteigenden Knoten vorgestellt. Die Neigung der Bahn aber ist der Winkel CKL.

Sei endlich der Punkt L des Kreises KL der sphärische Ort des Planeten, so ist das von L auf den Kreis BC ge-

fällte sphärische Perpendikel LH die Breite, und der Bogen BH die Länge des Planeten in der Grundebene. Die Längen in der Bahn werden von einem Punkte B' der letztern an gerechnet, der eben so weit, als B, hinter K zurückliegt. Die Länge des Knoten, mag sie in der Bahn, oder in der Grundebene gezählt werden, ist hiernach von gleicher Grösse. Die Länge des Planeten in der Bahn aber ist der Bogen $B'L = BK + KL$.

Sind nun nächst den obigen vier Stücken a oder n, ε, e und ω (§. 45.), von denen die Längen ε und ω jetzt von B' an gerechnet werden, noch die Länge des aufsteigenden Knoten $BK = B'K = \vartheta$ und die Neigung $CKL = \iota$ gegeben, so sieht man leicht, wie daraus für eine beliebige von der Epoche an gerechnete Zeit t die Länge BH des Planeten in der Grundebene und seine Breite HL berechnet werden können. Zuerst hat man nämlich die wahre Länge in der Bahn

$$B'L = l = \varepsilon + nt + 2e \sin(\varepsilon + nt - \omega) \quad (\text{§. 45.}).$$

Hieraus folgt $KL = l - \vartheta$, und durch die Formeln für das bei H rechtwinklige sphärische Dreieck KHL:

$$\tan KH = \tan(l - \vartheta) \cos \iota,$$
$$\sin HL = \sin(l - \vartheta) \sin \iota,$$

ergeben sich die Bögen KH und HL, von denen, wenn $\iota < 90^0$ ist, KH mit KL in einerlei Quadranten fällt, HL aber positiv oder negativ ist, und daher L nördlich oder südlich von BC absteht, nachdem $l - \vartheta <$ oder $> 180^0$ ist. Hiermit aber sind die Länge in der Grundebene, $BH = \vartheta + KH$, und die Breite HL gefunden.

Was noch den Radius Vector anlangt, so wird dieser, wie im Vorigen, nach der Formel

$$r = a(1 - e \cos(\varepsilon + nt - \omega))$$

berechnet; und hiermit hat man Alles, was zur Bestimmung des Orts des Planeten im Raume gehört. Die sechs zu dieser Bestimmung nöthigen Stücke: *die mittlere Entfernung* a und *die mittlere Länge in der Epoche* ε, *die Excentricität* e und *die Länge des Perihels* ω, *die Neigung* ι und *die Länge des aufsteigenden Knoten* ϑ nennt man die sechs Elemente der Planetenbewegung.

§. 48.

Da die gegenseitigen Neigungen der Bahnebenen nur wenige Grade enthalten, so können wir die Grundebene immer dergestalt wählen, dass die Neigungen der Bahnebenen gegen diese Ebene ebenfalls sehr gering sind. Indem wir uns alsdann gestatten, von den Neigungen eben so, wie früher von den Excentricitäten, bloss die erste Potenz beizubehalten und daher statt $\sin \iota$ und $\cos \iota$ resp. ι und 1 zu setzen, wird zu Folge der obigen Formeln: $\text{tang}\, KH = \text{tang}\,(l - \vartheta)$, also $KH = l - \vartheta$, und die Länge in der Grundebene

$$BH = \vartheta + KH = l = \text{der Länge in der Bahn}$$
$$= \varepsilon + nt + 2e \sin(\varepsilon + nt - \omega).$$

Die Breite aber wird:

$$HL = \iota \sin(l - \vartheta) = \iota \sin(\varepsilon + nt - \vartheta),$$

weil auch noch das Product ιe weggelassen werden kann.

Anmerkung. Wenn aus der Länge in der Bahn die Länge in der Grundebene gefunden werden soll, so wird es wegen der Kleinheit von ι auch bei einer schärfern Rechnung immer hinreichen, von ι nur noch die zweite Potenz zu berücksichtigen. — Man setze die Länge BH in der Grundebene, $= L$, so ist

$$\text{tang}\,(L - \vartheta) = \cos \iota \,\text{tang}\,(l - \vartheta),$$

folglich

$$\text{tang}\,(L - l) = \frac{\text{tang}\,(L - \vartheta) - \text{tang}\,(l - \vartheta)}{1 + \text{tang}\,(L - \vartheta)\,\text{tang}\,(l - \vartheta)}$$
$$= -\frac{(1 - \cos \iota)\,\text{tang}\,(l - \vartheta)}{1 + \cos \iota\, \text{tang}\,(l - \vartheta)^2},$$

und daher, wenn man bei der zweiten Potenz von ι stehen bleibt:

$$L - l = -\frac{2 \sin \frac{1}{2} \iota^2\, \text{tang}\,(l - \vartheta)}{1 + \text{tang}\,(l - \vartheta)^2}$$
$$= -\sin \tfrac{1}{2} \iota^2 \sin 2\,(l - \vartheta),$$

wo die zweite Seite der Gleichung noch durch $\sin 1''$ dividirt werden muss, wenn $L - l$, in Secunden ausgedrückt, angenommen wird. Alsdann ist mithin

$$L = l - \frac{\sin \frac{1}{2} \iota^2 \sin 2\,(l - \vartheta)}{\sin 1''}.$$

Das Glied, welches hiernach zu l hinzugefügt werden muss, um l in L zu verwandeln, wird die Reduction auf die Grundebene genannt.

So ist z. B. die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik $= 5^0\, 8'\, 47'',9$. Mit diesem Werthe von ι findet sich $\frac{\sin \frac{1}{2}\iota^2}{\sin 1''}$ $415'',8$, und es ist daher die Länge des Mondes in der Ekliptik

$$= l - 6'\, 55'',8 \sin 2\,(l - \vartheta),$$

wenn l die Länge desselben in seiner Bahn und ϑ die Länge des aufsteigenden Knoten dieser Bahn in der Ekliptik bezeichnet.

§. 49.

Theils einiger im Folgenden vorkommenden Fälle willen, wo die bisher nur näherungsweise entwickelten Formeln für die elliptische Bewegung nicht ausreichen, theils wegen der Wichtigkeit und des Anziehenden, welches der Gegenstand an sich hat, sollen am Schlusse dieses Kapitels die vorzüglichsten die vollkommene elliptische Bewegung betreffenden Formeln und Sätze noch mitgetheilt werden.

Im Dreieck FSL (Fig. 22.) hat man

$$FL^2 = FS^2 + SL^2 - 2FS\,.\,SL \cos FSL.$$

Es ist aber $FSL = 180^0 - v$, $FS = 2ae$, $SL = r$, und nach der in §. 40. bemerkten Eigenschaft der Brennpunkte, $FL = 2a - r$. Hiermit wird die voranstehende Gleichung:

$$(2a - r)^2 = 4a^2e^2 + r^2 + 4aer \cos v,$$

und nach gehöriger Reduction:

$$(1^*) \quad a\,(1 - e^2) = r + er \cos v,$$

oder, wenn man (2) ... $a\,(1 - e^2) = p$ setzt:

$$(1) \quad \frac{p}{r} = 1 + e \cos v,$$

die Polargleichung der Ellipse, wenn der eine Brennpunkt zum Pol und die grosse Axe zur Grundlinie genommen wird; nur muss dabei $e < 1$ sein. Für $e = 1$ ist es die Polargleichung der Parabel, und für $e > 1$ die der Hyperbel, also in jedem Falle die Polargleichung eines Kegelschnitts. Die Constante $2p$ heisst der Parameter des Kegelschnitts. Rechnet man dieselbe stets positiv, so ist nach (2) die Constante a bei der Ellipse positiv, bei der Parabel unendlich gross und bei der Hyperbel negativ.

§. 50.

Aufgabe. Aus der wahren Anomalie $v = PSL$ (Fig. 24.) die Zeit t, in welcher sie vom Planeten beschrieben wird, zu finden.

Auflösung. Es verhält sich t zur Umlaufszeit U, wie das Flächenstück SPL zur Fläche der ganzen Ellipse. Um das letztere Verhältniss zu berechnen, bedient man sich des sogenannten excentrischen Kreises, eines Kreises, welcher in der Ebene der Ellipse über der grossen Axe AP, als Durchmesser, beschrieben wird. Ein von L auf AP gefälltes Perpendikel LI treffe den Kreis in K. Der Winkel PMK am Mittelpunkte M heisst die excentrische Anomalie und werde mit E bezeichnet; es wird dann sein ($SI = MI - MS$, d. i.)

$$(3) \quad r \cos v = a \cos E - ae.$$

Substituirt man hierin für $r \cos v$ seinen aus der Polargleichung (1*) fliessenden Werth, so kommt nach gehöriger Reduction:

$$(4) \quad r = a - ae \cos E.$$

Diese zwei Gleichungen, das einemal addirt, das anderemal von einander subtrahirt, geben:

$$r\,(1 + \cos v) = a\,(1 - e)\,(1 + \cos E),$$
$$r\,(1 - \cos v) = a\,(1 + e)\,(1 - \cos E).$$

Aus letztern zwei Gleichungen aber fliesst, wenn man sie das einemal in einander dividirt und das anderemal mit einander multiplicirt, und dann jedesmal die Wurzel auszieht:

$$(5) \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E,$$
$$(6) \quad r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Aus (6) folgt die bekannte Proportionalität zwischen den Ordinaten einer Ellipse und eines um ihre grosse (oder kleine) Axe beschriebenen Kreises; denn es verhält sich nach (6) $r \sin v : a \sin E = \sqrt{1 - e^2} : 1$, d. i. IL zu IK, wie die kleine Axe zur grossen (§. 40.). Denkt man sich daher den Kreis um AP gedreht, bis die rechtwinklige Projection seines auf AP perpendikularen Durchmessers auf die unbewegt blei-

bende Ebene der Ellipse mit der kleinen Axe der letztern identisch wird, so wird L die Projection von K, und eben so jeder andere Punkt der Ellipse die Projection eines Punktes des Kreises, mithin die ganze Ellipsenfläche, welche G heisse, die Projection der ganzen Kreisfläche $= \pi a^2$, so wie der Theil SPL der erstern die Projection des Theils SPK der letztern. Da sich nun je zwei Theile einer Ebene wie ihre Projectionen auf eine andere Ebene verhalten, so wird sein

$$U : t = G : SPL = \pi a^2 : SPK.$$

Es ist aber $SPK = MPK - MSK$

$$= \tfrac{1}{2} MP \,.\, PK - \tfrac{1}{2} MS \,.\, IK = \tfrac{1}{2} a \,.\, aE - \tfrac{1}{2} ae \,.\, a \sin E,$$

folglich $U : t = 2\pi : E - e \sin E$, folglich, weil $2\pi : U = n$,

$$(7) \quad nt = E - e \sin E.$$

Aus v oder der wahren Anomalie wird demnach t gefunden, wenn man zuerst aus v nach (5) die excentrische Anomalie E, und hierauf aus E nach (7) die mittlere Anomalie nt (§. 43.) berechnet, deren Division mit n das gesuchte t giebt.

§. 51.

Zusätze. *a.* Soll aus t oder der damit proportionalen mittlern Anomalie die wahre gefunden werden, so hat man den umgekehrten Weg einzuschlagen, wobei jedoch die Berechnung von E aus nt wegen der transscendenten Form der Gleichung (7) nur indirect sich bewerkstelligen lässt. Statt dessen kann man v, so wie r, durch nt auch vermittelst Reihen ausdrücken, welche nach den Potenzen von e fortgehen, und bei den Planeten, wo e ein kleiner Bruch ist, schnell convergiren werden. Die Anfänge dieser Reihen haben wir bereits kennen gelernt (§. 43. (1) und (2)). Mit Hülfe der jetzt erhaltenen strengen Formeln muss es möglich sein, jene Anfänge so weit, als man will, fortzusetzen.

Ohne diese Entwickelungen hier anstellen zu wollen, bemerke ich nur, dass man zu dem Anfange der Reihe für r, mittelst der Polargleichung der Ellipse allein, das von e^2

abhängige Glied noch finden kann. Es folgt nämlich aus (1*) bis auf die zweite Potenz von e genau:

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos v} = a\,(1-e^2)\,(1-e\cos v + e^2\cos v^2)$$
$$= a\,(1 - e\cos v - e^2 \sin v^2).$$

Es war aber, wenn man die mittlere Anomalie $nt = \alpha$ und $2\sin\alpha = x$ setzt, bis zur ersten Potenz von e genau: $v = \alpha + ex$ (§. 43.). Mithin ist, wie vorhin, bis zur zweilen genau:

$$r = a\,(1 - e\cos(\alpha + ex) - e^2\sin\alpha^2),$$

worin für $\cos(\alpha + ex)$ sein bis zur ersten Potenz genauer Werth $= \cos\alpha - ex\sin\alpha = \cos\alpha - 2e\sin\alpha^2$ zu substituiren ist. Dies giebt:

$$r = a\,(1 - e\cos\alpha + e^2\sin\alpha^2)$$
$$= a\,(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - e\cos\alpha - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\alpha)\ ^{*}).$$

b. Bei der geneigten Lage, die wir im Vorigen der Ebene des excentrischen Kreises gegen die Ebene der Ellipse gaben, ist das constante Verhältniss zwischen irgend einem Theile der erstern Ebene und seiner Projection auf die letztere, $= IK : IL = 1 : \sqrt{1-e^2} = \sqrt{a} : \sqrt{p}$, nach (2). In demselben Verhältnisse steht mithin auch die Fläche des excentrischen Kreises selbst $= \pi a^2$ zur Ellipsenfläche; letztere ist daher $= \pi a \sqrt{ap}$.

§. 52.

Suchen wir jetzt die Geschwindigkeiten der verschiedenen veränderlichen Grössen zu bestimmen, welche bei der Bewegung eines Planeten in Betracht kommen.

Die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ oder die vom Radius Vector in der Zeiteinheit überstrichene Fläche ist nach Kepler's

---

*) Ueberhaupt lassen sich r und v durch Reihen darstellen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von α fortlaufen, und die, wenn sie bis zur $n$ten Potenz von e genau sein sollen, noch die Cosinus und Sinus der $n$fachen von α enthalten müssen. — Bis zur 3ten Potenz genau sind diese Reihen:

$$r = a\,[1 + \tfrac{1}{2}e^2 - (e - \tfrac{3}{8}e^3)\cos\alpha - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\alpha - \tfrac{3}{8}e^3\cos 3\alpha],$$
$$v = \alpha + (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\sin\alpha + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2\alpha + \tfrac{13}{12}e^3\sin 3\alpha.$$

zweitem Gesetze constant und daher gleich der Fläche der Ellipse, dividirt durch die Umlaufszeit, also $= \pi a \sqrt{ap} : U$, d. i.

$$(8) \quad c = na^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} = k \sqrt{p} \text{ (§. 44.)}.$$

Zufolge des dritten Kepler'schen Gesetzes ist demnach *die Flächengeschwindigkeit von einer Planetenbahn zur andern der Quadratwurzel aus dem Parameter proportional.*

Nach §. 35. ist allgemein $c = rrv'$. Dies giebt, in Verbindung mit dem jetzt erhaltenen Werthe von c, die Geschwindigkeit der wahren Anomalie

$$(9) \quad v' = \frac{k \sqrt{p}}{rr}.$$

Da ferner von $\frac{1}{r}$ und $\cos v$ nach §. 11. und §. 14. Zusatz die Geschwindigkeiten $= -\frac{r'}{rr}$ und $-v' \sin v$ sind, so folgt aus der zwischen r und v bestehenden Gleichung (1) die Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten von r und v

$$\frac{pr'}{rr} = ev' \sin v.$$

Hierin für v' seinen Werth aus (9) substituirt, erhält man die Geschwindigkeit des Radius Vector

$$(10) \quad r' = \frac{ke}{\sqrt{p}} \sin v.$$

Mit (9) und (10) ergiebt sich endlich das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn (§. 35.)

$$u^2 = r^2 v'^2 + r'^2 = \frac{k^2}{pr^2}(p^2 + e^2 r^2 \sin v^2).$$

Nach (1) ist aber $er \cos v = p - r$, folglich $p^2 + e^2 r^2 \sin v^2$

$$= p^2 + e^2 r^2 - (p-r)^2 = 2pr - (1-e^2) r^2 = pr\left(2 - \frac{r}{a}\right)$$

und

$$(11) \quad u^2 = \frac{k^2}{a} \frac{2a - r}{r} = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit eines Planeten ist demnach umgekehrt dem Abstande (r) des Planeten von der Sonne und direct seinem Abstande (2a — r) vom andern Brennpunkte proportional.

§. 53.

Aufgabe. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne und ein Tag mittlere Zeit zu den Einheiten des Raumes und der Zeit genommen, sind für einen gegebenen Zeitpunkt T der Radius Vector r, die Länge L in der Grundebene und die Breite b eines Planeten, so wie die Geschwindigkeiten r', L', b', mit denen sich r, L, b zu derselben Zeit ändern, gegeben. Man soll aus diesen sechs Stücken die sechs Elemente a, ε, e, ω, ι und ϑ der Bewegung des Planeten bestimmen.

Auflösung. 1) In dem bei H rechtwinkligen sphärischen Dreieck KHL (Fig. 23.) ist $KH = L - \vartheta$, $HL = b$, $HKL = \iota$, $KL = l - \vartheta$ (§. 47.), und man hat daher

$$(\alpha) \quad \text{tang}\, b = \text{tang}\, \iota \sin (L - \vartheta),$$

folglich*) $b' : \cos b^2 = \text{tang}\, \iota \,.\, L' \cos (L - \vartheta)$, und nach Elimination von tang ι

$$\text{tang}\, (L - \vartheta) = \frac{L'}{b'} \sin b \cos b.$$

Hiermit ergeben sich für $L - \vartheta$ zwei um 180° von einander verschiedene Werthe, von denen, wegen (α), der in den ersten oder der in den zweiten Halbkreis fallende zu nehmen ist, je nachdem b positiv oder negativ (nördlich oder südlich) ist. Die Knotenlänge ϑ findet sich alsdann $= L - (L - \vartheta)$, und die immer positiv gerechnete Neigung ι durch die Formel

$$\text{cotg}\, \iota = \text{cotg}\, b \sin (L - \vartheta).$$

2) Im Dreieck KHL ist ferner

$$\text{tang}\, (L - \vartheta) = \cos \iota \,\text{tang}\, (l - \vartheta), \text{ folglich}$$
$$L' : \cos (L - \vartheta)^2 = l' \cos \iota : \cos (l - \vartheta)^2,$$

oder $L' \cos b^2 = l' \cos \iota$, wegen der Relation $\cos (l - \vartheta) = \cos b \cos (L - \vartheta)$. Somit hat man zur Bestimmung der

*) Weil von tang b die Geschwindigkeit $= b' : \cos b^2$ ist. Denn setzt man tang $b = x$, so ist $\sin b = x \cos b$, mithin $b' \cos b = x' \cos b - x b' \sin b$, woraus nach leichter Reduction der eben bemerkte Werth von x' hervorgeht.

Länge l in der Bahn und der Geschwindigkeit l' dieser Länge die Formeln:

$$\cotg (l - \vartheta) = \cos \iota \cotg (L - \vartheta) \text{ und } l' = L' \cos b^2 : \cos \iota,$$

wobei, wie schon bemerkt (§. 47.), $l - \vartheta$ mit $L - \vartheta$ in einen und denselben Quadranten fällt.

3) Mit l' und den gegebenen r und r' findet sich das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn (§. 35.)

$$u^2 = r^2 l'^2 + r'^2.$$

Damit wird nach (11) die halbe grosse Axe

$$a = 1 : \left(\frac{2}{r} - \frac{u^2}{k^2}\right), \text{ wo } k = 0{,}017202 \text{ (§. 44.).}$$

Werkwürdiger Weise ist also *die Länge der grossen Axe schon durch den Radius Vector und die Grösse der Geschwindigkeit des Planeten bestimmt, und bleibt dieselbe, welches auch die Richtung dieser Geschwindigkeit sein mag.*

4) Mit l' und a ergeben sich nach (9) und (2) der halbe Parameter und die Excentricität

$$p = \frac{r^4 l'^2}{k^2} \text{ und } e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}};$$

denn wegen $v = l - \omega$ ist $v' = l'$. — Hiermit berechne man v nach der aus (1) fliessenden Formel

$$\cos v = (p - r) : er,$$

wo v im ersten oder im zweiten Halbkreise zu nehmen ist, jenachdem r' positiv oder negativ ist; denn nach (10) muss $\sin v$ mit r' einerlei Zeichen haben. Auch kann man sich der Formel (10) zugleich als Controle bei der Berechnung von v hedienen. — Die Länge des Perihels findet sich alsdann: $\omega = l - v$.

5) Mit e und v berechne man nach (5) und (7) die mittlere Anomalie und addire ω zu derselben. Dies giebt die mittlere Länge λ zur Zeit T, woraus sich ε oder die mittlere Länge in der Epoche findet, wenn man die seit der Epoche bis T verstrichene Zeit mit $n, = ka^{-\frac{3}{2}}$, multiplicirt und dieses Product von λ abzieht.

Zusatz. Wendet man die voranstehende Aufgabe auf keinen fingirten Fall, sondern auf die Planeten selbst an, so wird man, da diese sich in Ellipsen bewegen, die grosse Axe $2a$ immer positiv (§. 49.), also $ru^2 < 2k^2$ erhalten. Wollte man dagegen die sechs Stücke r, L, b, r', L', b' willkührlich gegeben sein lassen, so könnte sich ru^2 eben so gut auch $=$ oder $> 2k^2$ finden. Man sieht aber bald, dass sich auch diesen letztern Fällen die Lösung der Aufgabe anpassen lässt, sobald man nur die allgemeinere Voraussetzung macht, *dass sich die Planeten in Kegelschnitten um die Sonne, als den einen Brennpunkt, jeder mit constanter Flächengeschwindigkeit, bewegen, und dass diese Geschwindigkeit von einer Bahn zur andern der Quadratwurzel aus dem Parameter proportional ist.* Letzteres, oder die Formel $c = k\sqrt{p}$ (§. 52.), ist nämlich dem dritten Kepler'schen Gesetze zu substituiren, da bei einer parabolischen oder einer hyperbolischen Bahn von einer Umlaufszeit — folglich auch von einer mittlern Bewegung und einer mittlern Länge — nicht die Rede sein kann.

Dieses vorausgesetzt, ist die Bahn selbst eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem a positiv, unendlich gross, oder negativ ist, jenachdem sich also $ru^2 <, =, > 2k^2$ findet. Die Lage und die Dimensionen der Bahn, also die fünf Elemente a, e, ω, ι, ϑ, werden in jedem Falle nach denselben Formeln, wie vorhin, bestimmt. Und wenn auch die Bewegung in der somit gefundenen Bahn, sobald diese eine Parabel oder eine Hyperbel ist, durchaus nicht auf dieselbe Weise, wie bei der Ellipse, berechnet werden kann, so erhellet doch wenigstens die Möglichkeit einer solchen Berechnung aus den gegebenen Stücken. Denn dadurch, dass der Planet zur Zeit T den durch r, L und b bestimmten Ort einnimmt, und dass sein Radius Vector in jeder Zeiteinheit eine Fläche $= \frac{1}{2}k\sqrt{p}$ überstreicht, ist sein Ort in der Bahn für jeden andern Zeitpunkt, und damit seine Bewegung, vollkommen bestimmt.

Wie daher auch durch die sechs Stücke r, L, ... b' der Ort eines Planeten und die Grösse und Richtung seiner Geschwindigkeit für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt sein

mag, so lässt sich daraus immer und nur auf eine Weise eine nach den letztgedachten Gesetzen in einem Kegelschnitte vor sich gehende Bewegung ableiten.

Zweites Kapitel.

Bestimmung der Kräfte, durch welche die elliptische Bewegung der Planeten erzeugt wird.

§. 54.

Da sich ein Kreis als eine Ellipse ansehen lässt, deren Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen, so kann nach dem ersten der drei Kepler'schen Gesetze ein Planet auch einen Kreis beschreiben, in dessen Mittelpunkte die Sonne steht. Und weil bei der Bewegung eines Punktes in einem Kreise die Fläche, welche der vom Mittelpunkte aus gezogene Radius Vector überstreicht, dem vom Punkte beschriebenen Bogen proportional ist, so wird zu Folge des zweiten Kepler'schen Gesetzes der Planet bei einer kreisförmigen Bewegung der Zeit proportionale Bögen beschreiben, d. h. gleichförmig im Kreise fortgehen.

Die Kräfte, durch welche diese in der Natur möglichen und von der Wirklichkeit wegen der Kleinheit der Excentricitäten nicht sehr abweichenden Kreisbewegungen hervorgebracht werden, ergeben sich unmittelbar aus §. 22.. Es ist dann nämlich die auf jeden Planeten wirkende Kraft nach dem Mittelpunkte seines Kreises, also nach der Sonne, gerichtet und $= nna$, wenn a die Entfernung des Planeten von der Sonne und n seine constante Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze ist aber $nna^3 =$ dem von einem Planeten zum andern constanten kk (§. 44.). Damit wird die Kraft $= kk : aa$, so dass unter der Hypothese gleichförmiger Kreisbewegung jeder Planet nach der Sonne hin von einer Kraft getrieben wird, die dem

Quadrate seiner Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional ist.

§. 55.

Untersuchen wir jetzt, ob und wie sich das im vorigen §. unter der möglich einfachsten Annahme erhaltene Resultat im Falle der Natur modificirt, wo die Bahnen der Planeten Ellipsen sind. Wir wollen deshalb die allgemeinen Formeln (*D*) in §. 36. für die Kräfte *T* und *V* bei einer durch ihre Polarcoordinaten gegebenen Bewegung zu Hülfe nehmen und sie mit den zu Ende vorigen Kapitels entwickelten strengen Formeln der elliptischen Bewegung in Verbindung bringen.

Weil die Flächengeschwindigkeit des Radius r constant ist (§. 52.), so wird $V = 0$, d. h. die gesuchte Kraft wirkt in der Richtung von r (§. 37. *a.*) und reducirt sich auf

$$T = r'' - rv'^2$$

allein, wo v' eben so, wie l' in §. 36., die Winkelgeschwindigkeit von r bedeutet. Nun ist nach den Formeln (9) und (10) in §. 52.:

$$v' = \frac{k\sqrt{p}}{rr} \text{ und } r' = \frac{ke}{\sqrt{p}} \sin v, \text{ folglich}$$

$$r'' = \frac{ke}{\sqrt{p}}\, v' \cos v = \frac{kke}{rr} \cos v, = \frac{kk(p-r)}{r^3},$$

weil nach (1) in §. 49. $e \cos v = (p - r) : r$ ist. Mit diesen Werthen für r'' und v' ergiebt sich aber:

$$T = \frac{kk(p-r)}{r^3} - \frac{kkp}{r^3} = -\frac{kk}{rr} = -\frac{n^2 a^3}{rr} = -\frac{cc}{prr}.$$

Wir schliessen hieraus: 1) dass die einen Planeten treibende Kraft stets nach der Sonne zu gerichtet ist, — nicht abwärts von derselben, wegen des negativen Werthes von T —; 2) dass diese Kraft für verschiedene Entfernungen eines und desselben Planeten von der Sonne dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist; 3) dass aber auch, weil das Product $n^2 a^3$ oder kk für alle Planeten denselben Werth hat, die Kräfte, mit denen verschiedene Planeten nach der Sonne getrieben werden, im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen von der Sonne

stehen, und dass daher für zwei gleichweit von der Sonne entfernte Planeten auch diese Kräfte einander gleich sind.

Zusätze. *a*. Weil die Polargleichung der Curve, aus welcher der Werth von T hergeleitet worden, nicht bloss der Ellipse, sondern auch der Parabel und der Hyperbel angehört (§. 49.), so müssen die jetzt gemachten drei Schlüsse auch dann gelten, wenn sich die Planeten überhaupt in Kegelschnitten nach den in §. 53. Zusatz ausgesprochenen Gesetzen bewegen.

b. Aber auch umgekehrt können wir behaupten: *Werden die Planeten nach der Sonne von Kräften getrieben, die sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Sonne verhalten, so müssen sie mit constanten Flächengeschwindigkeiten um die Sonne, als den einen Brennpunkt, Kegelschnitte beschreiben, deren Parameter den Quadraten der Flächengeschwindigkeiten proportional sind.*

Um dieses zu beweisen, wollen wir setzen, dass ein Planet zu der gegebenen Zeit T den gegebenen Ort L einnehme und die ihrer Grösse und Richtung nach gegebene Geschwindigkeit u habe. Mit diesen Stücken und mit dem Gesetze der auf ihn wirkenden Kraft ist seine Bewegung vollkommen bestimmt (§. 25.). Kennt man daher eine Bewegung, bei welcher der Planet zur Zeit T den Ort L und die Geschwindigkeit u hat, und wobei die ihn treibende Kraft stets nach der Sonne gerichtet und $= kk : rr$ ist, so kann es nicht noch eine zweite Bewegung geben, bei welcher die Umstände zur Zeit T dieselben wären und die Kraft nach dem nämlichen Gesetze wirkte. Nun wissen wir aus §. 53. Zusatz, dass, welches auch zur Zeit T der Ort L und die Geschwindigkeit u sein mag, sich immer und nicht mehr als eine diese Bedingungen zur Zeit T erfüllende und nach den daselbst bemerkten Gesetzen sich richtende Bewegung in einem Kegelschnitte angeben lässt. Wir wissen ferner (vor. *a*.), dass die aus dieser Bewegung zu folgernde Kraft nach der Sonne gekehrt und $= kk : rr$ ist. Mithin kann der Planet unter dem Einflusse einer solchen Kraft keine andere, als die durch die gegebenen T, L, u und k vollkommen bestimmte, Bewegung in einem Kegelschnitte befolgen.

§. 56.

Einige Planeten werden auf ihren Wegen um die Sonne von kleinen Nebenplaneten, auch Monde oder Trabanten genannt, begleitet. Diese richten sich bei ihren Bewegungen um ihre Hauptplaneten gleichfalls nach den Kepler'schen Gesetzen. Denn jeder von ihnen beschreibt um seinen Planeten eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte der letztere steht; die von dem Planeten nach dem Trabanten gezogene Gerade überstreicht der Zeit proportionale Flächen, und in den Fällen, wo mehrere Trabanten um denselben Planeten laufen, verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Würfel der mittlern Entfernungen. Uebrigens sind die Bahnen der Trabanten, gleich denen der Planeten selbst, nur sehr wenig excentrisch, und ihre Neigungen gegen die Bahnen ihrer Planeten halten, mit alleiniger Ausnahme des Systems der Uranustrabanten, nur wenige Grade. Die Entfernung jedes Trabanten von seinem Planeten ist aber durchweg gegen die Entfernung des letztern von der Sonne eine sehr geringe Grösse*).

§. 57.

Die Sonne als ruhend angenommen, ist die absolute Bewegung eines Trabanten aus seiner relativen Bewegung um seinen Hauptplaneten und aus der Bewegung des letztern um die Sonne zusammengesetzt (§. 6.). Es ist daher auch die auf einen Trabanten wirkende Kraft als aus zwei Kräften zusammengesetzt zu betrachten, von denen die eine die Bewegung um den Hauptplaneten erzeugt, die andere aber der Kraft gleich und parallel ist, welche die Bewegung des Planeten um die Sonne hervorbringt. — Ist die Sonne nicht in Ruhe, so muss nach demselben Princip auf den Planeten sowohl, als seinen Trabanten, eine dritte Kraft wirken, die

*) Die mittlere Entfernung des Erdenmondes von der Erde ist der 399ste Theil, — des 4ten Jupitermondes vom Jupiter der 413te, — des 7ten Saturnmondes vom Saturn der 395ste — und des 6ten Uranusmondes vom Uranus der 1167ste Theil der mittlern Entfernung des jedesmaligen Hauptplaneten von der Sonne.

derjenigen, welche die Bewegung der Sonne erzeugt, gleich und parallel ist. —

Da nun die Trabanten in den Bewegungen um ihre Planeten die nämlichen Gesetze, wie die Planeten in ihren Bewegungen um die Sonne, befolgen, so wird nach denselben Schlüssen, welche wir in §. 55. in Bezug auf die Planetenbewegungen machten, die erstere jener zwei Kräfte nach dem Hauptplaneten gerichtet und sowohl für einen und denselben Trabanten, als auch von einem zum andern, wenn sich mehrere um denselben Planeten bewegen, dem Quadrate der Entfernung vom Planeten umgekehrt proportional sein. Da ferner wegen der immer sehr geringen Entfernungen der Trabanten von ihren Planeten gegen die Entfernungen der letztern von der Sonne die zwei von einem Trabanten und seinem Planeten nach der Sonne gezogenen Linien sowohl ihrer Richtung, als ihrer Grösse nach, nur wenig von einander verschieden sind, so wird die letztere jener zwei Kräfte stets nahe nach der Sonne gerichtet sein und nahe sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Trabanten von der Sonne verhalten, und dieses sowohl für einen und denselben Trabanten, als auch von einem Trabanten zu irgend einem andern, oder auch zu irgend einem Planeten. In Betracht mehrerer kleiner Abweichungen von den Kepler'schen Gesetzen, die insbesondere beim Laufe des Mondes um die Erde sich zeigen, könnte es auch vielleicht sein, dass sich die auf einen Trabanten wirkende Kraft in zwei Kräfte zerlegen liesse, von denen die eine nach dem Hauptplaneten, die andere nach der Sonne gerichtet wäre, und welche die angegebenen Verhältnisse vollkommen genau befolgten.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Anziehungskraft.

§. 58.

Wie wir im vorigen Kapitel erkannt haben, werden die Bewegungen der Planeten und ihrer Trabanten um die Sonne durch Kräfte hervorgebracht, die — wenigstens bei den Planeten — stets genau nach der Sonne gerichtet sind. Wir können hiernach nicht umhin, die Sonne selbst als die Ursache dieser Bewegungen anzusehen, so dass, wenn die Sonne vernichtet würde, damit auch die Bewegungen der Planeten und ihrer Trabanten um den von der Sonne eingenommenen Punkt aufgehoben würden. Wir legen daher der Sonne eine anziehende Kraft bei, die sich auf alle sie umkreisenden Körper erstreckt, und welche in demselben Verhältniss abnimmt, in welchem das Quadrat der Entfernung des angezogenen Körpers zunimmt.

Und da nach demselben Gesetze, wie die Planeten nach der Sonne, so auch jeder Trabant nach seinem Planeten hingetrieben wird, so sind wir genöthigt, auch jedem Planeten, der von Trabanten begleitet wird, eine anziehende Kraft zuzuschreiben, welche im Verhältnisse des Quadrats der Entfernung abnimmt; und wir können hieraus der Analogie nach schliessen, dass auch die übrigen Planeten, um welche keine Trabanten laufen, anziehende Kräfte besitzen.

§. 59.

Die anziehende Kraft der Planeten giebt sich noch durch eine andere Betrachtung zu erkennen, die von der Trabantenbewegung ganz unabhängig ist. — Man denke sich zwischen die Sonne S und einen Planeten P eine unbiegsame Stange von der Länge SP gebracht und beide Körper an die Enden der Stange befestigt. Würde nun bloss P von S angezogen, wirkten also auf P nach der Richtung PS unausgesetzt sich wiederholende Stösse, so würde sich das

System der beiden Körper, die nach ihrer Verbindung durch die Stange einen einzigen ausmachen, nicht durch eine äussere Veranlassung, sondern durch eine von dem Theile *S* des Systems selbst ausgehende Kraft, nach der Richtung *PS* bewegen, was gegen den Grundsatz in §. 15. streitet, dass ein ruhender Körper sich nicht von selbst in Bewegung setzen kann. Mithin muss auf *S* eine Kraft wirken, welche der Kraft auf *P* das Gleichgewicht hält und daher die Richtung *SP* hat, d. h. *S* wird hinwiederum von *P* angezogen.

Auf gleiche Art wird geschlossen, dass, weil jeder Trabant von seinem Hauptplaneten und von der Sonne angezogen wird, auch umgekehrt jeder Trabant seinen Planeten und die Sonne anzieht.

Ueberhaupt also kann bei zwei Körpern nie eine bloss einseitige Anziehung — und eben so wenig eine bloss einseitige Abstossung — statt finden, sondern sie ist immer gegenseitig. Die zwei Kräfte aber, mit denen die Körper auf einander wirken, müssen, wenn die gegenseitige Entfernung der Körper unveränderlich gemacht wird, sich das Gleichgewicht halten.

§. 60.

Im Bisherigen haben wir die Kräfte bloss nach den von ihnen erzeugten Geschwindigkeiten geschätzt. Nach dem Grundsatze in §. 17. sind wir hierzu ohne Weiteres nur dann berechtigt, wenn die in Betracht kommenden Kräfte an einem und demselben Körper angebracht sind; nicht aber mehr bei Vergleichung von Kräften, welche auf verschiedene Körper wirken, indem sonst, was doch nicht der Fall ist, je zwei Körper durch Kräfte, die nach der in §. 16. aus der Statik entlehnten Definition einander gleich sind, in gleiche Geschwindigkeit versetzt werden müssten. Indessen wird man dadurch, dass man auch bei verschiedenen Körpern die Kräfte einfach den Geschwindigkeiten proportional setzt, nicht zu Fehlschlüssen verleitet werden, dafern man nur dessen immer eingedenk bleibt, dass unter dem Verhältnisse der Kräfte das Verhältniss der von ihnen erzeugten Geschwindigkeiten, nicht aber ihr statisches, gemeint ist.

Wenn es daher z. B. hiess, dass zwei gleichweit von der Sonne entfernte Planeten mit gleichen Kräften nach der Sonne getrieben werden, so sollte dieses eigentlich bloss ausdrücken, dass die zwei Planeten mit gleichen Geschwindigkeiten nach der Sonne zu fallen anfangen, ohne dass man damit behaupten wollte, dass die Kräfte, welche diese einander gleichen Geschwindigkeiten hervorbringen, auch statisch einander gleich, d. i. solche seien, die sich das Gleichgewicht halten können.

Anders verhält es sich bei der im vorigen §. angestellten Betrachtung, nach der wir schon im Voraus wissen, dass die auf die Sonne und einen Planeten wirkenden Kräfte statisch einander gleich sind. Untersuchen wir dabei zuerst, was aus dem, obschon vor der Hand noch unbekannten, Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten, welche diese zwei Kräfte der Sonne und dem Planeten mittheilen, auf die Beschaffenheit der beiden Körper selbst geschlossen werden kann.

§. 61.

Um kurz auszudrücken, dass zwei Körper durch zwei statisch einander gleiche Kräfte in gleiche Geschwindigkeiten versetzt werden, sagt man, dass die beiden Körper gleiche Masse haben. Von einem Körper, welcher aus zwei, drei etc. an Masse einander gleichen Körpern zusammengesetzt ist, sagt man, dass seine Masse das Doppelte, Dreifache etc. der Masse jedes der einzelnen Körper ist; und somit ist klar, wie das Verhältniss der Massen zweier Körper immer dnrch Zahlen ausgedrückt werden kann.

Man denke sich jetzt ein System von m vollkommen frei beweglichen und hinsichtlich ihrer Massen einander gleichen Körpern. Jeder dieser Körper erhalte gleichzeitig einen Stoss, und alle diese Stosskräfte seien einander statisch gleich nnd ihre Richtungen einander parallel, so werden sich die m Körper in Parallellinien mit gleichen Geschwindigkeiten zu bewegen anfangen und folglich ihre gegenseitige Lage nicht ändern. Dasselbe wird daher noch geschehen, wenn die m Körper gleich vom Anfange an ihre Lage gegen einander

nicht ändern können und mithin einen einzigen festen bilden, der nun, ohne sich zu drehen, nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit, wie jeder einzelne, fortgehen wird. Alsdann aber lässt sich nach einem bekannten Satze der Statik statt der *m* Kräfte eine einzige setzen, deren Richtung, parallel den Richtungen der *m* einzelnen, den Schwerpunkt der verbundenen *m* Körper trifft, und welche das *m*fache (§. 16.) jeder der *m* einzelnen Kräfte ist.

Wird demnach das Verhältniss der Kräfte in statischem Sinne oder nach den von ihnen einem und demselben Körper ertheilten Geschwindigkeiten geschätzt, so wird, um zwei Körper, deren Massen $= 1$ und $= m$ sind, in gleiche Geschwindigkeit zu versetzen, beim letztern Körper eine *m*mal grössere Kraft, als beim erstern, erfordert, d. h. bei gleichen Geschwindigkeiten zweier an Masse verschiedener Körper verhalten sich die dazu nöthigen Kräfte wie die Massen. Sind aber auch die Geschwindigkeiten verschieden, so verhalten sich die Kräfte wie die Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten, weil, um derselben Masse eine *n*mal grössere Geschwindigkeit beizubringen, eine *n*mal grössere Kraft erfordert wird.

Das jetzt von Stosskräften Gesagte muss nach §§. 20. und 21. auch auf Kräfte anwendbar sein, die, wie es in der Natur geschieht, stetig wirken. In dieser Hinsicht ist noch zu bemerken, dass man den bisher dafür gebrauchten Ausdruck beschleunigende Kraft für den Fall beibehält, wenn man eine stetige Kraft bloss nach der von ihr bewirkten Geschwindigkeit beurtheilt, und dass eine stetige Kraft, wenn man sie zugleich nach der von ihr bewegten Masse schätzt, eine bewegende Kraft genannt wird. Das Verhältniss der bewegenden Kräfte ist daher aus dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten, d. i. der beschleunigenden Kräfte, und aus dem der Massen zusammengesetzt. Nimmt man also, wie in §. 20., diejenige beschleunigende Kraft zur Einheit, welche in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt, und setzt man diejenige bewegende Kraft $= 1$, welche einer Masse $= 1$ während einer Zeit $= 1$ eine Geschwindig-

keit = 1 beibringt, so ist bei einer vorgegebenen Bewegung *die bewegende Kraft dem Producte aus der beschleunigenden Kraft in die bewegte Masse gleich.*

Uebrigens soll in der Folge, wenn von einer stetigen Kraft ohne weiteren Zusatz die Rede ist, wie bisher, immer die beschleunigende, nicht die bewegende, gemeint sein.

Nach diesen Erörterungen ist es nun leicht, die am Ende des vorigen §. aufgeworfene, die gegenseitige Anziehung der Sonne S und eines Planeten P betreffende, Frage zu beantworten. Da nämlich S und P von zwei Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, also von zwei einander gleichen bewegenden Kräften, gegen einander getrieben werden, so ist das Product aus der beschleunigenden Kraft, welche auf S wirkt, in die Masse von S gleich dem Producte aus der den Körper P beschleunigenden Kraft in die Masse von P, und es verhalten sich daher in diesem Falle die beschleunigenden Kräfte umgekehrt wie die Massen, auf welche sie wirken; oder, wie man auch sagen kann: die Kraft, mit welcher jeder der beiden Körper S und P den andern anzieht, ist direct der Masse des anziehenden Körpers proportional.

Folgerung. Wird ein Körper P von einem andern S nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der gegenseitigen Entfernung, oder nach irgend einem andern von der Entfernung abhängenden Verhältnisse, angezogen, so wird nach demselben Verhältnisse auch S von P angezogen.

§. 62.

Sammeln wir jetzt die in den vorhergehenden §§. gemachten Schlüsse, so wird jeder Planet und jeder Trabant von der Sonne und jeder Trabant von seinem Planeten angezogen, und umgekehrt zieht jeder Planet und jeder Trabant die Sonne und jeder Trabant seinen Planeten an. Die (beschleunigende) Kraft aber, mit welcher dieses geschieht, und soweit wir dieselbe beurtheilen können, richtet sich nach den zwei Gesetzen, dass sie bei einem und demselben anziehenden Körper sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des angezogenen Körpers verhält, und dass sie bei zwei sich gegenseitig anziehenden Körpern der Masse des

anziehenden proportional ist. Bei einer so grossen Anzahl von Fällen, in denen sich die Anziehung zu erkennen giebt, ist es nun in sehr hohem Grade wahrscheinlich, dass je zwei Körper unsers Sonnensystems überhaupt, also auch je zwei Planeten, oder ein Planet und ein nicht zu ihm gehörender Trabant, u. s. w. nach denselben zwei Gesetzen auf einander Einfluss üben, einen Einfluss, der sich zwar nicht so augenfällig und nicht durch so einfache Schlüsse, wie in den vorhin betrachteten Fällen, zu erkennen giebt, dennoch aber aus mancherlei zu beobachtenden kleinen Abweichungen der Planetenbewegungen von den Kepler'schen Gesetzen sich wenigstens ahnen lässt. Wir wollen daher, so lange wir nicht auf Erscheinungen stossen, welche deutlich dagegen sprechen, die gegenseitige Anziehung der Himmelskörper als allgemein herrschend betrachten.

Uebrigens ist es nicht schwer, die eben gedachten zwei Gesetze der Anziehung zu Einem zu verbinden. Da nämlich die beschleunigende Kraft, mit welcher die Sonne einen in der Entfernung r befindlichen Planeten oder Trabanten anzieht, $= kk : rr$ ist (§. 55. und §. 57.), so ist hinwiederum, wenn wir, die Masse der Sonne zur Einheit nehmend, die Masse des letztern Körpers $= m$ setzen, die Kraft, mit welcher von diesem Körper die Sonne, also auch jeder andere in der Entfernung r von ihm befindliche Körper des Systems angezogen wird,

$$= \frac{kkm}{rr},$$

d. h. die anziehende Kraft eines Himmelskörpers verhält sich direct wie seine Masse und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des angezogenen Körpers.

§. 63.

Die Kraft, mit welcher ein Himmelskörper den andern anzieht, wirkt aber nicht bloss im Ganzen, sondern erstreckt sich auf alle einzelnen Theile der Körper, wie sich durch folgende Schlüsse erhärten lässt.

Bedeuten A und B zwei Planeten, welche sich in gleichen Entfernungen von der Sonne S befinden. Man denke sich A aus a Theilchen zusammengesetzt, die sämmtlich an

Masse einander gleich sind. Eben so bestehe *B* aus *b* Theilchen, die unter sich und mit den vorigen einerlei Masse haben. Die Massen von *A* und *B* selbst verhalten sich daher wie die Zahlen *a* und *b*.

Werden nun alle diese *a* und *b* Theilchen, die, wegen der Kleinheit der Dimensionen von *A* und *B* gegen die sich gleichen Entfernungen *SA* und *SB*, als sämmtlich gleichweit von *S* entfernt angesehen werden können, mit statisch einander gleichen Kräften nach *S* getrieben, so sind — übereinstimmend mit §. 55. — die Geschwindigkeiten, mit denen *A* und *B* nach *S* sich zu bewegen anfangen, einander gleich (vergl. §. 61.).

Wollte man dagegen setzen, dass unmittelbar nur eines der *a* Theilchen von *A*, es heisse α, und nur eines der *b* Theilchen von *B*, es heisse β, von *S* angezogen würde, und dass die übrigen Theile in Folge ihres Zusammenhanges mit α und β nach *S* getrieben würden, so müssten, wegen der gleichen Geschwindigkeiten von *A* und *B*, die auf α und β wirkenden Kräfte, statisch geschätzt, in dem Verhältnisse der Massen von *A* und *B* oder der Zahlen *a* und *b* stehen. Es liesse sich aber dann nicht einsehen, warum die übrigen Theile von *A* und *B* einen Einfluss auf die Kräfte haben sollten, durch welche α und β in Bewegung gesetzt werden. Auf ähnliche Unbegreiflichkeiten stösst man, wenn man die anziehende Kraft von *S* auf einige der *a* und *b* Theilchen stärker, auf andere schwächer wirkend setzt. Wir sehen uns daher zu der Hypothese gedrungen, dass je zwei auch noch so kleine Theile von *A* und *B*, dafern sie nur gleiche Masse haben, von *S* mit statisch gleicher Kraft angezogen werden.

Zieht aber *S* jedes Theilchen von *A*, wie α, an, so wird auch hinwiederum *S* von α mit einer so vielmal schwächern beschleunigenden Kraft, als α weniger Masse denn *S* hat, angezogen. Mit derselben beschleunigenden Kraft wird aber von α auch jeder andere Körper *T* angezogen, der mit *S* gleiche Entfernung von α hat, woraus wir nach derselben Weise wie vorhin schliessen, dass mit der nämlichen Kraft auch jedes Theilchen des *S* und des *T* von α angezogen wird.

Von je zwei Körpern A und S wirkt demnach jedes Theilchen des einen auf jedes Theilchen des andern mit einer anziehenden beschleunigenden Kraft, welche der Masse des anziehenden Theilchens proportional ist.

Die sphärische Gestalt der Himmelskörper, so wie Erscheinungen auf unserer Erde, von denen im folgenden Kapitel die Rede sein wird, führen uns endlich zu dem Schlusse, dass nicht bloss je zwei Theilchen, die zwei verschiedenen Himmelskörpern angehören, sondern auch je zwei Theilchen eines und desselben Körpers sich anziehen. Denn war der Körper, wie es wenigstens von unserer Erde höchst wahrscheinlich ist, anfangs in einem flüssigen Zustande, und bildeten seine Theile irgend eine von der Kugel abweichende Form, oder waren sie gar im Raume zerstreut, so konnte es nur durch ihre gegenseitige Anziehung geschehen, dass sie so nahe als möglich auf einander zugingen und sich so lange bewegten und vertheilten, bis ein von allen Seiten gleichförmiger Körper, also eine Kugel, entstand.

§. 64.

Nach allem diesen sind wir veranlasst anzunehmen, d a s s j e z w e i T h e i l c h e n d e r M a t e r i e ü b e r h a u p t s i c h g e g e n s e i t i g a n z i e h e n , u n d d i e s e s n a c h d e m G e s e t z e , d a s s d i e a n z i e h e n d e K r a f t e i n e s T h e i l c h e n s d i r e c t d e r M a s s e d e s s e l b e n u n d u m g e k e h r t d e m Q u a d r a t e s e i n e r E n t f e r n u n g v o m a n g e z o g e n e n T h e i l c h e n p r o p o r t i o n a l i s t.

Allerdings können beim Rückblick auf das Vorhergehende an der völlig allgemeinen Gültigkeit dieses Satzes noch Zweifel übrig bleiben, da wir mehrere der obigen Schlüsse nur der Analogie nach machten, da wir nur die augenfälligsten Gesetze der Bewegung in unserm Sonnensysteme, nicht auch die kleinen Abweichungen von denselben, berücksichtigten, und noch manche Erscheinungen, die gleichfalls zur Prüfung jenes Satzes hätten dienen können, ganz unbeachtet liessen. Wenn aber schon die grosse Einfachheit des Satzes es höchst wahrscheinlich macht, dass er ein wahres Naturgesetz aufstellt, so werden noch mehr die bald folgenden Unter-

suchungen jene Zweifel zu beseitigen dienen. Wir werden nämlich, den umgekehrten Weg einschlagend, das Gesetz der allgemeinen Anziehung als Naturgesetz zum Grunde legen und die Erscheinungen, wie sie ihm zufolge statt finden müssen, bestimmen und bis in ihre kleineren Details zu erforschen suchen. Die Uebereinstimmung der so erhaltenen Resultate mit den Erscheinungen wird uns dann immer mehr überzeugen, dass durch das Gesetz in der Allgemeinheit und Bestimmtheit, wie es vorhin ausgesprochen wurde, und wie es von NEWTON (geb. 1642, gest. 1727), dem Entdecker desselben, in seinen unsterblichen „Principia philosophiae naturalis" (Londini 1687) veröffentlicht worden, alle am Himmel zu beobachtenden Bewegungen auf das Befriedigendste erklärt werden können.

Viertes Kapitel.

Nächste Folgen aus dem Gesetze der allgemeinen Anziehung.

§. 65.

Bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne ist nach dem Gesetze der allgemeinen Anziehung nicht bloss die anziehende Kraft, welche die Sonne auf den Planeten äussert, sondern auch die des Planeten auf die Sonne thätig. Um die vereinte Wirkung dieser Kräfte in Rechnung zu nehmen, seien M und m irgend zwei sich anziehende Massen, r ihre gegenseitige Entfernung und K die Kraft, mit welcher eine Masse $= 1$ einen von ihr in einer Entfernung $= 1$ befindlichen Körper anzieht. Alsdann sind die auf m und M wirkenden Kräfte $= KM : rr$ und $Km : rr$ und resp. von m nach M und von M nach m gerichtet. Bei den dadurch bewirkten Bewegungen von M und m ist aber (§. 24. a.) die Kraft, welche die Bewegung von m gegen M erzeugt, zusammengesetzt

aus der auf m wirkenden Kraft und der auf M wirkenden, aber nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft, also zusammengesetzt aus den nach der gemeinschaftlichen Richtung mM wirkenden Kräften $KM : rr$ und $Km : rr$; d. h. die Bewegung von m gegen M, wie sie statt finden würde, wenn M in Ruhe wäre, wird von einer nach M gerichteten Kraft $= K(M + m) : rr$ hervorgebracht. Die Bewegung selbst geschieht in einem Kegelschnitte (§. 55. *b.*); und wenn dieser eine Ellipse ist, a die halbe grosse Axe derselben und n die mittlere Bewegung bedeutet, so ist (§. 55.) $n^2a^3 : rr$ der Ausdruck der Kraft, welche, nach M gerichtet, die relative Bewegung von m um M hervorbringt. Man hat folglich:

$$K(M + m) = n^2 a^3,$$

und eben so ist für je zwei andere sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehende und um einander bewegende Körper, für welche M', m', a', n' dieselbe Bedeutung haben, welche M, m, a, n für das erstere Paar hatten: $K(M' + m') = n'^2 a'^3$; mithin verhält sich

$$n^2 a^3 : n'^2 a'^3 = M + m : M' + m',$$

oder, wenn U und U' die Umlaufszeiten in beiden Systemen bezeichnen:

$$(\alpha) \quad a^3 : a'^3 = (M + m)\, U^2 : (M' + m')\, U'^2, \text{ d. h.}$$

Bei verschiedenen Paaren sich um einander bewegender Körper verhalten sich die Würfel der mittlern Entfernungen wie die Quadrate der Umlaufszeiten, multiplicirt mit den Summen der Massen.

Wenden wir diesen aus dem Gesetze der allgemeinen Anziehung fliessenden Satz zunächst auf die um die Sonne M laufenden Planeten m, m', ... an, so ist der Würfel der mittlern Entfernung eines Planeten von der Sonne nicht bloss dem Quadrate der Umlaufszeit, wie es das Kepler'sche Gesetz will, sondern auch noch der Summe der Massen der Sonne und des Planeten proportional. Sollen daher die beiden Gesetze einander nicht widersprechen, so müssen wir entweder annehmen, dass die Summen $M + m$, $M + m'$, ... einander gleich, also auch die Massen m, m', ... der einzelnen Planeten einander gleich sind, oder dass diese Massen

gegen die der Sonne überaus klein sind, und daher die Verhältnisse zwischen $M+m$, $M+m'$, ... vom Verhältnisse der Gleichheit äusserst wenig abweichen, um einen Unterschied, der bei der Vergleichung der beobachteten Umlaufszeiten und der überdies nur mit grosser Mühe aus Beobachtungen zu bestimmenden mittlern Entfernungen ganz unmerkbar bleibt. Schon wegen der sehr grossen Verschiedenheit des körperlichen Inhalts der einzelnen Planeten und wegen der ausserordentlichen Kleinheit dieser Körper gegen den Sonnenkörper ist die letztere Hypothese die bei weitem wahrscheinlichere und wird noch auf andere Weise, wie wir sogleich sehen werden, als die richtige bestätigt.

§. 66.

Eben so, wie die Planeten gegen die Sonne, sind auch die Trabanten gegen ihre Planeten dem Inhalte, und daher sehr wahrscheinlich auch der Masse, nach sehr klein. Diese Einrichtung der Natur giebt uns ein Mittel an die Hand, um für die Körper unsers Sonnensystems, welche Begleiter haben, die Verhältnisse zwischen ihren Massen näherungsweise zu finden. Denn es folgt aus der Proportion (α), wenn wir m gegen M und m' gegen M' vernachlässigen:

$$M : M' = \frac{a^3}{U^2} : \frac{a'^3}{U'^2} \text{ *)}.$$

Wir wollen uns dieses an einigen Beispielen erläutern und dabei, wie in §. 44., die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zur Längeneinheit und einen Tag mittlere Zeit zur Zeiteinheit nehmen. — Da die Länge des siderischen Jahres = 365,256 Tagen, so ist erstens für die Bewegung der Erde um die Sonne:

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{1}{(365{,}256)^2} = \mu.$$

*) Unter der Annahme, dass m um M und m' um M' sich kreisförmig bewegen, geht diese Proportion schon daraus hervor, dass die Kräfte, mit denen m und m' nach M und M' hingetrieben werden, zu Folge des Newton'schen Gesetzes sich wie $\frac{M}{a^2}$ und $\frac{M'}{a'^2}$, nach der Theorie der Kreisbewegung aber sich wie $\frac{a}{U^2}$ und $\frac{a'}{U'^2}$ (§. 22.) verhalten.

— Die mittlern Werthe der Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes unter dem Aequator sind 8″,5776 und 57′ 1″, und daher die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde

$$= \frac{8,5776 \sin 1''}{\sin 57' 1''} = \frac{1}{398,811}.$$

Da ferner der siderische Monat 27,3217 Tage enthält, so ist für die Bewegung des Mondes um die Erde:

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{1}{(398,811)^3 (27,3217)^2} = \mu'.$$

— Die mittlere Entfernung Jupiters von der Sonne ist = 5,20277, und der Halbmesser der Bahn seines vierten Trabanten, wie er von der Sonne aus erscheint, im Mittel = 8′ 18″, folglich die mittlere Entfernung dieses Trabanten vom Jupiter = 5,2 .. sin 8′ 18″. Der siderische Umlauf desselben beträgt 16,6890 Tage. Mithin ist für seine Bewegung um den Jupiter:

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{(5,20277 \sin 8' 18'')^3}{(16,6890)^2} = \mu''.$$

Es verhalten sich demnach die Massen der Sonne, der Erde und des Jupiter wie μ, μ' und μ'', oder es ist, die Masse der Sonne = 1 gesetzt, die Masse der Erde

$$= \frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{365,256}{27,3217}\right)^2 \frac{1}{(398,811)^3} = \frac{1}{354912},$$

die Masse Jupiters

$$= \frac{\mu''}{\mu} = \left(\frac{365,256}{16,689}\right)^2 (5,20277 \sin 8' 18'')^3 = \frac{1}{1053},$$

wenigstens sehr nahe. Streng genommen, sind nach der Proportion (α) des vor. §., wenn wir die Massen der Sonne, der Erde, des Mondes, des Jupiter und seines vierten Trabanten resp. mit S, T, L, I und i bezeichnen, die Zahlen μ, μ', μ'' den Summen $S+T$, $T+L$, $I+i$ proportional, folglich:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{T+L}{S+T} = \frac{1}{354912},$$

$$\frac{\mu''}{\mu} = \frac{I+i}{S+T} = \frac{1}{1053}.$$

Die erste dieser Gleichungen bedarf aber noch einer kleinen Correction wegen der Störung, welche die Sonne in

der Bewegung des Mondes um die Erde hervorbringt, und wodurch die gegenseitige Anziehung von Erde und Mond durchschnittlich in dem Verhältnisse 358,45 : 357,45 verringert wird. Die aus dieser Bewegung geschlossene der gegenseitigen Anziehung proportionale Massensumme $T + L$ ist folglich in demselben Verhältnisse zu klein und muss daher im umgekehrten Verhältnisse vergrössert werden. Dies giebt:

$$\frac{T + L}{S + T} = \frac{1}{353922}.$$

Nun ist L oder die Masse des Mondes, wie sie der Freiherr von Lindenau aus dem von ihr erzeugten Schwanken der Erdaxe bestimmt hat, der 88,448ste Theil der Erdmasse T. Hiermit wird letztere

$$\frac{T}{S} = \frac{1}{353921} \cdot \frac{88,448}{89,448} = \frac{1}{357922}.$$

Was die Masse Jupiters, $= I : S$, anlangt, so ist wegen der Kleinheit von T gegen S, so wie auch von i gegen I, — man hat $i = \frac{1}{23412} I$ aus den gegenseitigen Störungen der Trabanten gefunden — auch bringt die Sonne keine merkbaren Störungen in diesem System hervor — so ist $I : S$ von $I + i : S + T$, $= \frac{1}{1053}$, nicht merkbar verschieden.

Zusatz. Eben so, wie die Massen der Erde und des Jupiter, lassen sich auch die des Saturn und des Uranus aus den Bewegungen ihrer Trabanten ermitteln. Man hat auf diese Weise die Masse

des Saturn $= \frac{1}{3500}$, des Uranus $= \frac{1}{17918}$

erhalten. Die Massen der übrigen Planeten, welche von keinen Trabanten begleitet werden, hat man aus den kleinen Störungen, welche ihre anziehende Kraft in der Bewegung der ihnen am nächsten kommenden Planeten erzeugt, zu bestimmen gesucht. So haben sich aus den Störungen der Erde durch Venus und Mars die Massen

der Venus $= \frac{1}{401847}$, des Mars $= \frac{1}{2680337}$

ergeben. Dagegen ist die in dem Verzeichnisse der Planetenmassen bisher vorkommende Merkursmasse $= \frac{1}{2025810}$ nur eine hypothetische, und nicht wie die übrigen aus Beobachtungen hergeleitet.

§. 67.

Ein Körper heisst gleichförmig **dicht**, wenn je zwei ihrem räumlichen Inhalte nach gleiche Theile desselben auch gleiche Masse haben. Von zwei Körpern A und B, deren jeder gleichförmig dicht ist, nennt man die Dichtigkeit des A das $m$fache der Dichtigkeit von B, wenn von zwei ihrem Inhalte nach gleichen Theilen von A und B die Masse des Theils von A dem $m$fachen der Masse des Theils von B gleich ist. Setzt man daher von einem Körper, bei welchem jeder Theil, dessen Inhalt $= 1$, eine Masse $= 1$ hat, auch die Dichtigkeit $= 1$, so ist von einem gleichförmig dichten Körper, wenn seine Masse $= m$ und sein Inhalt $= 1$ ist, seine Dichtigkeit $= m$; ist aber der Inhalt $= v$, so ist die Dichtigkeit $=$ der Masse eines Theils des Körpers, dessen Inhalt $= 1$ ist, also $= m : v$; d. h. *die Dichtigkeit wird gefunden, wenn man die Masse durch den Inhalt dividirt; und umgekehrt ist die Masse dem Product aus der Dichtigkeit in den Inhalt gleich.*

Ist ein Körper nicht gleichförmig dicht, so nennt man den Quotienten, welcher durch Division der Masse des Körpers mit seinem Inhalte gefunden wird, seine **mittlere Dichtigkeit**, die daher auch einerlei ist mit der Dichtigkeit eines gleichförmig dichten Körpers, welcher, der Masse und dem Inhalte nach, dem erstern Körper gleich ist.

§. 68.

Kugeln verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Würfel ihrer Halbmesser. Die mittleren Dichtigkeiten der Himmelskörper verhalten sich daher wie die Massen dividirt durch die Würfel der Halbmesser dieser Körper. So verhält sich z. B. die Dichtigkeit der Sonne zur Dichtigkeit der Erde wie

$$\frac{357922}{(\sin 16' 1'')^3} : \frac{1}{(\sin 8'',5682)^3}.$$

Denn der scheinbare Halbmesser der Sonne in der mittlern Entfernung derselben von der Erde ist $16' 1''$, und von der Sonne aus erscheint in der nämlichen Entfernung der Halbmesser einer Kugel, welche mit der in dem Verhältnisse

301 : 302, $= p : 1$, abgeplatteten Erde gleichen Inhalt hat, unter dem Winkel von

$$\sqrt[3]{p}\,.\,8'',5776 = \frac{8'',5776}{1,0011} = 8'',5682\ ^*).$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde = 1 gesetzt, ist demnach die mittlere Dichtigkeit der Sonne

$$= 357922 \left(\frac{8,5682 \sin 1''}{\sin 16' 1''}\right)^3 = 0,2537,$$

also beiläufig $\frac{1}{4}$ der Dichtigkeit der Erde.

Eben so hat man aus den Massen und Halbmessern der übrigen Planeten ihre Dichtigkeiten berechnet und die

des Mondes = 0,619,	des Jupiter = 0,238,
der Venus = 0,923,	des Saturn = 0,138,
des Mars = 0,948,	des Uranus = 0,242

gefunden, also sämmtlich kleiner, als die Dichtigkeit der Erde, die hierbei, wie vorhin, = 1 angenommen wird. Insbesondere ist die geringe Dichtigkeit der drei von der Sonne entferntesten und zugleich grössten Planeten auffallend, während Venus und Mars nicht viel weniger dicht, als die Erde selbst, sind.

Vergleicht man die Dichtigkeiten der Erde, des Jupiter und des Saturn mit einander, so zeigt sich, dass sie nahe in dem umgekehrten Verhältnisse der mittlern Entfernungen dieser Körper von der Sonne stehen. Nach diesem Gesetze, was jedoch nicht auch bei Venus, Mars und Uranus sich bestätigt findet, hat Laplace die Dichtigkeit des Merkur = 2,94 geschlossen und hiernach die oben bemerkte Masse dieses Planeten bestimmt. Erst vor wenigen Jahren ist es

*) Ein Ellipsoid, dessen drei Hauptaxen = $2a$, $2b$, $2c$ sind, hat den Inhalt einer Kugel, deren Halbmesser = $\sqrt[3]{(abc)}$ ist. Die Erde ist ein Ellipsoid, bei welchem die zwei grössten Hauptaxen, sie seien $2a$ und $2b$, einander gleich sind. Mithin ist die Erde einer Kugel gleich, deren Halbmesser = $\sqrt[3]{(a^2 c)}$, = $a\sqrt[3]{p}$, wenn $c : a = p$ gesetzt wird. — Man bemerke nur noch, dass 8'',5776 der Winkel ist, unter welchem a oder der Halbmesser des Erdäquators von der Sonne aus erscheint (§. 66.).

den Astronomen möglich geworden, diese Massenbestimmung einer Prüfung zu unterwerfen. Es kam nämlich gegen Ende des Jahres 1838 der nach Encke seinen Namen führende Komet dem Merkur so nahe, dass letzterer einen sehr merkbaren Einfluss auf die Bewegung des Kometen äusserte, einen Einfluss, der für uns bei der damals nicht sehr beträchtlichen Entfernung des Kometen von der Erde um so augenfälliger werden musste. Aus den zu jener Zeit in Berlin angestellten Beobachtungen des Kometen hat sich nun ergeben, dass die Laplace'sche Masse und Dichtigkeit mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt werden müssen. „Dieses Resultat kann jedoch nur als eine durch einen rohen Ueberschlag gewonnene erste Näherung angesehen werden"*).

§. 69.

Im Bisherigen haben wir die gegenseitige Anziehung der Himmelskörper bloss aus den gegenseitigen Entfernungen ihrer Mittelpunkte und aus ihren Massen bestimmt, also eben so, als ob die Masse eines jeden in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre. Da aber die Gesammtanziehung zweier Körper aus den Partialanziehungen ihrer einzelnen Theilchen zusammengesetzt ist (§. 63.), so entsteht die Frage, ob nicht jene Bestimmung der Anziehung zweier Himmelskörper noch einer kleinen Berichtigung bedarf, sobald wir die Anziehungen ihrer einzelnen Theilchen berücksichtigen und deshalb noch die Gestalt und Grösse eines jeden und die Vertheilung seiner Masse mit in Rechnung nehmen.

Die Himmelskörper weichen von der Kugelgestalt nur sehr wenig, mehrere durchaus unmerklich, ab, und nach dem, was in §. 63. über die muthmassliche Bildung dieser Kugeln gesagt worden, ist es nicht wohl anders denkbar, als dass bei jeder derselben für sich in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte auch gleiche Dichtigkeit statt findet. Stellen wir uns daher eine solche Kugel durch concentrische Kugelflächen in genugsam dünne Schalen zerlegt vor, so wird jede dieser Schalen für sich — gegen das Ganze un-

*) Astronomische Nachrichten, XVI. Band, Seite 244.

bedeutende Irregularitäten abgerechnet — gleichförmig dicht sein, wenn auch die Dichtigkeit von einer Schale zur andern wechselt und, wie es am wahrscheinlichsten ist, von der Oberfläche der Kugel nach ihrem Mittelpunkte zunimmt.

Um daher die gegenseitige Anziehung zweier Himmelskugeln genau zu bestimmen, wollen wir zuerst die Anziehung einer gleichförmig dichten Kugelschale, deren Dicke unendlich klein ist, oder vielmehr geradezu die Anziehung einer gleichförmig dichten materiellen Kugelfläche, auf einen ausser ihr gelegenen materiellen Punkt zu ermitteln suchen. Ohne höheren Calcul anzuwenden, dürfte dieses folgendergestalt am einfachsten geschehen.

1) Sei P (Fig. 25.) der materielle Punkt und C der Mittelpunkt der materiellen Kugelfläche. Die Gerade PC treffe die Fläche in A und B, und eine durch PC gelegte Ebene schneide sie in dem grössten Kreise ATB. Sei FF' ein Element dieses Kreises. Während der Halbkreis AFB, wenn er um AB gedreht wird, die Kugelfläche erzeugt, beschreiben die Punkte F und F' zwei Parallelkreise und das Element FF' eine von diesen Kreisen begrenzte Zone. Man theile diese Zone durch Linien, die, wie FF', auf den zwei Kreisen perpendicular sind, in einander gleiche Elemente. Jedes derselben ist hiernach ein Rechteck, dessen Höhe $= FF'$ und dessen Breite = dem $2n$ten Theile des von F oder F' beschriebenen Kreises ist, wenn $2n$ die unendliche Anzahl der Elemente bezeichnet. Fällt man daher von F auf AB das Perpendikel FE und setzt die Dichtigkeit der Kugelfläche $= e$, so ist

$$\frac{\pi \cdot EF}{n} \cdot FF' = i$$

der Inhalt und ei die Masse jedes Elements (§. 67.).

2) Da der Punkt P von jedem dieser Elemente gleichweit, nämlich um eine Linie $= PF$, absteht, so wird er von jedem Elemente mit einer Kraft

$$v = \frac{Kei}{PF^2}$$

angezogen, deren Richtung mit PC einen Winkel $= CPF$ macht. Man zerlege jede dieser $2n$ Kräfte in zwei, von

denen die eine die Richtung PC hat, die andere auf PC normal ist. Jede der erstern ist $= v \,.\, PE : PF$, und daher ihre gleichfalls nach PC gerichtete Resultante

$$V = 2nv \,.\, \frac{PE}{PF} = \frac{2nKei \,.\, PE}{PF^3}$$
$$= \frac{2\pi Ke \,.\, PE \,.\, EF \,.\, FF'}{PF^3}.$$

Jede der letztern Kräfte ist $= v \,.\, EF : PF$, und ihre Richtungen sind parallel mit den $2n$ Radien, durch welche der von F beschriebene Kreis in $2n$ gleiche Theile getheilt wird. Diese Kräfte heben sich daher paarweise auf, nämlich je zwei, deren Richtungen parallel mit zwei einander entgegengesetzten Radien sind. Mithin reducirt sich die Anziehung der ganzen Zone auf die nach PC gerichtete Kraft V allein.

3) Man fälle von C auf PF das Perpendikel CD, so ist

$$\frac{PE}{PF} = \frac{PD}{PC} \text{ und } \frac{EF}{PF} = \frac{CD}{PC},$$

wodurch

$$V = 2\pi Ke \,.\, \frac{PD \,.\, CD \,.\, FF'}{PC^2 \,.\, PF} \text{ wird.}$$

Man trage ferner PF auf PF' von P bis G, so sind DFG und FGF' unendlich nahe rechte Winkel, so wie auch CFF' ein rechter. Mithin sind die Dreiecke FGF' und FDC gleichwinklig und es verhält sich $FF' : GF' = CF : CD$, folglich ist $CD \,.\, FF' = r \,.\, GF'$, wenn man den Halbmesser des Kreises ATB, $= r$ setzt. Dies giebt:

$$V = 2N \,.\, \frac{PD \,.\, GF'}{PF}, \text{ wo } N = \frac{\pi Ker}{PC^2}.$$

4) Man verlängere die Linien PF und PF', bis sie den Kreis ATB zum zweitenmale, in f und f', schneiden, und trage Pf auf Pf' von P bis g, so sind die Winkel $FF'G$ und $ff'g$ einander gleich, mithin die gleichnamigen Dreiecke gleichwinklig, und es verhält sich

$$PF : Pf = FG : fg = GF' : f'g,$$

folglich $PF : GF' = PF + Pf : GF' + f'g$

$$= 2PD : Ff - F'f',$$

weil D der Mittelpunkt der Sehne Ff, und $Ff = Gg$ ist. Hierdurch wird

$$V = N(Ff - F'f').$$

5) Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass die Anziehung des Punktes P von der Zone, welche bei Drehung des Halbkreises ATB von ff' erzeugt wird, ebenfalls $= N(Ff - F'f')$ ist und die Richtung PC hat. Auch folgt dieses schon daraus, dass N eine von den Elementen FF' und ff' unabhängige Grösse ist, und die Differenz $Ff - F'f'$ von ihnen auf gleiche Weise abhängt.

6) Seien $F'F''$, $F''F'''$, ... mehrere auf FF' im Kreise ATB folgende Elemente, und seien f'', f''', ... die Punkte, in denen der Kreis von den Geraden PF'', PF''', ... zum zweitenmale geschnitten wird, so zieht jede der beiden Zonen $[F'F'']$ und $[f'f'']$, d. i. der Zonen, welche von den Elementen $F'F''$ und $f'f''$ erzeugt werden, den Punkt P mit einer Kraft $V' = N(F'f' - F''f'')$ an; jede der beiden Zonen $[F''F''']$ und $[f''f''']$ mit einer Kraft $V'' = N(F''f'' - F'''f''')$, u. s. w. Hieraus folgt weiter die Anziehungskraft jeder der beiden Zonen $[FF'']$ und $[ff'']$, $= V + V' = N(Ff - F''f'')$; die Anziehungskraft jeder der beiden Zonen $[FF''']$ und $[ff''']$, $= V + V' + V'' = N(Ff - F'''f''')$; und so fort bei der Zusammensetzung noch mehrerer Elementarzonen, wie nahe auch von den Linien PFf, $PF'f'$, ... die erste der Linie PAB und die letzte der von P an den Kreis gezogenen Tangente PT liegt. Geht man bis zu diesen beiden Grenzen selbst fort, so findet sich, weil für die Tangente die Sehne $F''{\cdot\cdot}f''{\cdot\cdot}$ null wird, die Anziehung jeder der beiden Zonen $[AT]$ und $[BT]$, $= N . AB$, und da diese zwei Zonen die ganze Kugelfläche ausmachen, so ist die von derselben auf P ausgeübte Anziehung

$$= 2N . AB = 4Nr = \frac{4\pi K e r^2}{PC^2}.$$

Es ist aber $4\pi r^2$ der Inhalt der Kugelfläche, mithin $4\pi e r^2$ ihre Masse. Setzen wir diese $= m$, so wird die erhaltene Anziehung

$$= \frac{Km}{PC^2},$$

und wir folgern daraus den merkwürdigen Satz, *dass eine gleichförmig dichte Kugelfläche einen ausser ihr befindlichen Punkt P eben so anzieht, als wenn ihre Masse m in ihrem Mittelpunkte C vereinigt wäre.*

§. 70.

Zusätze. *a.* Ist FF' das Element eines Kreises, P ein Punkt in der Ebene des Kreises, und wird letzterer von den Geraden PF und PF' noch in f und f' geschnitten, so sind die Dreiecke PFF' und $Pf'f$ gleichwinklig, und es verhält sich daher $FF' : ff' = PF : Pf'$ oder Pf. Dasselbe wird auch gelten, wenn P ein Punkt im Raume und F, F' zwei einander unendlich nahe Punkte auf einer Kugelfläche sind, weil diese Fläche von der Ebene PFF' in einem Kreise geschnitten wird. Ist daher ABC (Fig. 26.) ein Elementardreieck auf einer Kugelfläche, P ein Punkt im Raume, und wird die Fläche von PA, PB, PC noch in a, b, c geschnitten, so bilden a, b, c ein zweites Elementardreieck, von welchem jede Seite zu der entsprechenden Seite des Dreiecks ABC sich wie die Entfernung des Dreiecks abc von P zu der Entfernung des ABC von P verhält. Mithin sind die Dreiecke ABC und abc einander ähnlich, und ihre Flächen verhalten sich wie $AB^2 : ab^2 = PA^2 : Pa^2$, d. i. wie die Quadrate ihrer Entfernungen von P. Der Punkt P wird folglich, wenn die Kugelfläche gleichförmig dicht ist, von den beiden Dreiecksflächen gleich stark angezogen.

b. Man sieht hieraus, wie das vorhin erhaltene Resultat der gleich starken Anziehung von Zonen, wie $[FF']$ und $[ff']$, sich verallgemeinern lässt. Zerlegt man nämlich irgend einen endlichen Theil Z der Kugelfläche in Elementardreiecke und bestimmt zu jedem derselben, wie ABC, ein zweites abc auf der Kugelfläche so, dass Aa, Bb, Cc sich in P treffen, so werden die Fläche Z und das Aggregat z der Dreiecke abc, d. h. je zwei Theile Z und z der Kugelfläche, deren Perimeter in einer und derselben den Punkt P zur Spitze habenden Kegelfläche liegen, diesen Punkt gleich stark anziehen.

c. Der in *a.* vorangestellte Satz ist auch dann richtig,

wenn der Punkt P nicht, wie in der Figur, ausserhalb, sondern innerhalb des Kreises liegt; und eben so wird der daraus gezogene Schluss gleicher Anziehungskraft der Theile Z und z einer Kugelfläche auch dann bestehen, wenn P innerhalb der Kugelfläche ist. Nur unterscheidet sich letzterer Fall von ersterem dadurch, dass die Anziehungskräfte von Z und z im erstern Falle eine und dieselbe Richtung haben und daher einander verdoppeln, im letztern Falle nach entgegengesetzten Richtungen wirken und sich daher aufheben. Zugleich geht daraus hervor, dass die Wirkung der ganzen Kugelfläche auf einen irgendwo innerhalb derselben befindlichen Punkt P null sein muss, da sich die ganze Fläche in Theile, die, wie Z und z, in Bezug auf P einander gegenüber stehen, zerlegen lässt, und folglich der Punkt nach allen Seiten gleich stark angezogen wird.

§. 71.

Folgerungen. *a.* Was in §. 69. von einer gleichförmig dichten Kugelfläche bewiesen worden, wird offenbar auch von einer gleichförmig dichten unendlich dünnen Kugelschale gelten. Und da jede Kugel in unendlich dünne mit ihr concentrische Kugelschalen zerlegt werden kann, so wird auch eine Kugel, wenn sie gleichförmig dicht ist, oder auch, wenn nur je zwei gleichweit vom Mittelpunkte entfernte Theilchen derselben gleiche Dichtigkeit haben, einen ausser ihr befindlichen Punkt eben so anziehen, als wenn ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Bezeichnet daher M die Masse einer solchen Kugel und C ihren Mittelpunkt, so wird von ihr der materielle Punkt P mit einer Kraft $= KM : PC^2$ angezogen*).

*) Ist P ein Punkt innerhalb der Kugel, so zerlege man sie durch eine durch P beschriebene concentrische Kugelfläche in eine kleinere Kugel und eine Kugelschale. Weil P auf der Oberfläche der kleinern Kugel und daher ausserhalb dieser Kugel liegt, so wird er von ihr eben so angezogen, als ob ihre Masse in C vereinigt wäre. Und dieses ist auch die Anziehung der ganzen Kugel, weil die Anziehung jeder der unendlich dünnen concentrischen Schalen, in welche man die ganze Schale zerlegen kann, nach vorigem §. *c.* null ist.

b. Heisst p die Masse des materiellen Punktes P, so ist die bewegende Kraft, mit welcher P nach der Kugel hingetrieben wird, gleich dem Producte aus p in die beschleunigende Kraft (§. 61.), $= KMp : PC^2$, und nach PC gerichtet. Sie ist zusammengesetzt aus den bewegenden Kräften, mit denen P nach den einzelnen Massentheilchen der Kugel getrieben wird. Da aber die Anziehung immer gegenseitig ist, und da bei zwei sich anziehenden Theilchen die bewegenden Kräfte, mit denen sie gegen einander getrieben werden, sich gleich sind (ebendaselbst), so ist auch die Resultante der bewegenden Kräfte, mit denen die Theilchen der Kugel nach P hin getrieben werden, $= KMp : PC^2$, und nach CP gerichtet. Zufolge der Anziehung von P wirkt demnach auf die Kugel eine nach CP gerichtete beschleunigende Kraft $= Kp : CP^2$.

c. Wird die Kugel, ausser von P, noch von mehrern andern Punkten P', P'', ..., deren Massen $= p'$, p'', ... sind, angezogen, so wirken auf die Kugel gleichzeitig nach CP, CP', CP'', ... gerichtete Kräfte, welche resp. $= Kp : CP^2$, $Kp' : CP'^2$, $Kp'' : CP''^2$, ... sind. Nehmen wir nun an, dass alle diese materiellen Punkte eine zweite Kugel bilden, bei welcher, wie bei der ersten, in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte gleiche Dichtigkeit statt findet, und bezeichnen wir die Masse dieser zweiten Kugel, $= p + p' + p'' + ...$, mit M_1 und ihren Mittelpunkt mit C_1, so lassen sich, nach dem in *a.* Bemerkten, alle jene Kräfte, deren Richtungen in C zusammentreffen, zu einer einzigen $= KM_1 : CC_1{}^2$ verbinden, deren Richtung CC_1 ist; d. h. die erste Kugel wird von der zweiten — und folglich auch die zweite von der ersten — eben so angezogen, als ob die Massen beider Kugeln in ihren Mittelpunkten vereinigt wären. *Wenn demnach auf zwei oder auch mehrere Kugeln, deren jede in gleicher Entfernung von ihrem Mittelpunkte gleiche Dichtigkeit hat, keine andern Kräfte, als ihre gegenseitige Anziehung, wirken, so bewegen sich die Mittelpunkte eben so, als ob sie allein vorhanden und in ihnen die Massen der Kugeln vereinigt wären.*

— Man sieht, wie dieses Resultat unmittelbare Anwen-

dung auf die Bewegung der Himmelskörper leidet, und dass wir bei Berechnung der Bahnen ihrer Mittelpunkte, wie bisher, so auch fernerhin die Dimensionen dieser Körper ganz unberücksichtigt lassen können.

Allerdings zeigen einige derselben eine kleine Abweichung von der Kugelgestalt. Der Einfluss dieser Abweichung auf die Bewegung der von ihnen angezogenen Körper ist aber bei ihren grossen Entfernungen von einander so gering, dass er jeder Beobachtung entgehen muss — mit Ausnahme der noch wahrnehmbaren Störungen, welche die abgeplattete Gestalt Jupiters in den Bewegungen seiner Trabanten hervorbringt, und mit Ausnahme des kleinen Einflusses der Abplattung der Erde auf die Bewegung des Mondes.

§. 72.

Die Kraft, mit welcher ein Himmelskörper einen andern Körper anzieht, ist nach vorigem §. umgekehrt dem Quadrate der Entfernung des andern vom Mittelpunkte des erstern proportional, und dieses nicht bloss bei grösseren Entfernungen, sondern auch dann noch, wenn beide Körper bis zur Berührung einander nahe sind. Es wird hiernach von besonderem Interesse für uns sein, aus der Kraft, mit welcher die Erde den um sie laufenden Mond anzieht, die Anziehungskraft der Erde auf Körper in der Nähe ihrer Oberfläche zu berechnen, indem die Wirkungen der letztern Kraft sich unmittelbar beobachten lassen.

Bedeutet a die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde und n seine mittlere Bewegung, so ist die Kraft, mit welcher der Mond in der Entfernung a nach der als ruhend gedachten Erde hingetrieben wird, oder der doppelte Raum (§. 10.), um welchen der Mond in der ersten Zeiteinheit gegen die Erde fällt, $= nna$; es ist der Werth von T in §. 55. für $r = a$. Nun ist (§. 66.)

$$a = \frac{1}{\sin 57' 1''} = 60{,}296 \text{ Halbmessern des Erdäquators}$$
$$= 60{,}296 \times 19\,630638 \text{ paris. Fuss,}$$

und, wenn wir zur Zeiteinheit die Minute wählen:

$$n = \frac{2\pi}{27{,}3217 \times 24 \times 60}.$$

Hiermit findet sich der Fallraum des Mondes in der ersten Minute:

$$\tfrac{1}{2} nna = 15{,}094 \text{ Fuss}.$$

Wegen der gegenseitigen Anziehung von Erde und Mond fällt aber sowohl letzterer gegen erstere, als erstere gegen letztern, und dieses mit Geschwindigkeiten, die sich umgekehrt wie ihre Massen, also wie 88 zu 1, verhalten. Der Theil des Fallraums, welcher auf den Mond allein kommt, oder der Fallraum eines Körpers, der um die mittlere Entfernung des Mondes absteht und eine gegen die Erde ganz zu vernachlässigende Masse hat, ist folglich der $\frac{88}{89}$ste Theil des ganzen. Dieser muss aber noch mit $\frac{358}{357}$ multiplicirt werden, um ihn von dem störenden Einflusse der Sonne zu befreien, als wodurch die gegenseitige Anziehung von Erde und Mond im Verhältnisse von 358 : 357 geschwächt wird (§. 66.). Wir erhalten somit den verbesserten Fallraum

$$= \tfrac{88}{89} \times \tfrac{358}{357} \times 15{,}094 = 14{,}966 \text{ Fuss}.$$

Um hieraus einen durchschnittlichen Werth für den Fallraum auf der Oberfläche der Erde abzuleiten, wollen wir für die abgeplattete Erde eine ihr an Inhalt und Masse gleiche Kugel substituiren. Vom Mittelpunkte dieser Erdkugel ist der Mond um

$$1{,}0011 \times 60{,}296 = 60{,}363 \text{ (§. 68.)}$$

ihrer Halbmesser entfernt, und es ist folglich auf der Oberfläche dieser Kugel der Fallraum in der ersten Minute

$$= 60{,}363^2 \times 14{,}966 \text{ Fuss, folglich in der ersten Secunde}$$

$$= \frac{60{,}363^2}{60^2} \times 14{,}966 = 15{,}148 \text{ Fuss}.$$

Es beträgt aber (§. 10.) zu Folge einer sehr grossen Anzahl an den verschiedensten Orten der Erde angestellter Pendelbeobachtungen (§. 26.) der Fallraum in der ersten Secunde unter den Polen 15,132 Fuss und unter dem Aequator 15,054, oder vielmehr $\frac{288}{287} \times 15{,}054 = 15{,}106$ Fuss, weil durch die Schwungkraft, welche durch die Axendrehung der

Erde erzeugt wird, und deren Wirkung hier ausser Acht bleiben muss, die Schwerkraft unter dem Aequator um ihren 288sten Theil verringert wird. Die grosse Uebereinstimmung zwischen diesen Zahlen und dem vorhin aus der Bewegung des Mondes gefolgerten Resultate*) zeigt nun auf das deutlichste, dass die Kraft, welche die Erscheinung des freien Falls der Körper, ihren Druck auf untergelegte Flächen u. s. w. hervorbringt, und welche die Schwerkraft genannt wird, völlig einerlei mit derjenigen ist, mit welcher die Erde auf den Mond und noch entferntere Himmelskörper wirkt. Diese sich über alle Grenzen erstreckende Kraft der Erde, sowie die ähnliche Kraft jedes andern Himmelskörpers, und die gegenseitige Anziehung der Materie überhaupt, hat man daher auch die allgemeine Schwere genannt.

Zusatz. Aus dem Fallraume auf der Oberfläche der Erde kann man leicht den Fallraum auf einem andern Himmelskörper mittelst der Verhältnisse zwischen den Massen und den Halbmessern beider Körper herleiten. Denn zu Folge des Ausdrucks für die anziehende Kraft ist er direct der Masse und umgekehrt dem Quadrate des Halbmessers proportional. Bezeichnen daher M, R, F die Masse der Erdkugel, ihren Halbmesser und den Fallraum in der ersten Secunde auf der Oberfläche der Erde, und bedeuten M', R', F' dasselbe für irgend einen andern Himmelskörper, so hat man

$$F' = \frac{M'}{M} \cdot \frac{R^2}{R'^2} \cdot F.$$

So ist z. B. für den Mond nahe $\frac{M'}{M} = \frac{1}{88}$, $\frac{R}{R'} = \frac{11}{3}$, woraus $F' = \frac{11}{72} \cdot F = \frac{1}{6,55} \cdot F$ folgt.

*) Eine noch bessere Uebereinstimmung erhält man, wenn man in obiger Rechnung die Laplace'sche Bestimmung der Mondsmasse, $= \frac{1}{75}$ der Erdmasse, anwendet. Denn damit finden sich 15,119 statt der obigen 15,148 Fuss. Den Pendelbeobachtungen zufolge ist aber auf einer der Erde an Inhalt und Masse gleichen sich nicht drehenden Kugel der Fallraum in der ersten Secunde = 15,116 Fuss.

Für die Sonne ist $\frac{M'}{M} = 357922$, $\frac{R}{R'} = \frac{1}{112}$, und daher $F' = 28{,}53 \,.\, F$.

Auf dem Monde fällt daher ein Körper in der ersten Secunde $\frac{15{,}12}{6{,}55} = 2{,}31$ Fuss, auf der Sonne $28{,}53 \times 15{,}12 = 431{,}4$ Fuss. — Ein Körper, der bei uns $6\frac{1}{2}$ Pfund wiegt, drückt auf dem Monde nicht stärker, als ein Gewicht von 1 Pfund bei uns; und ein Gewicht von 1 Pfund lastet auf der Sonne eben so stark, als ein Gewicht von $28\frac{1}{2}$ Pfund bei uns.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Bewegung bei einem System sich anziehender Körper.

---

§. 73.

Es ist schon erinnert worden, dass wegen der gegenseitigen Anziehung aller Körper die Planeten in ihren Bewegungen um die Sonne sich nicht vollkommen genau nach den von Kepler gefundenen Gesetzen bewegen. Dies würde nur dann geschehen können, wenn die Masse jedes Planeten gegen die Masse der Sonne unendlich klein wäre. Denn alsdann würden die Wirkungen der Planeten auf die Sonne und auf einander als verschwindend gegen die Wirkung der Sonne auf die Planeten zu betrachten sein. Abgesehen von einer muthmasslich statt findenden gemeinsamen Bewegung des ganzen Systems, würde dann die Sonne in Ruhe verharren und die Planeten würden sich um sie in vollkommenen Ellipsen bewegen. Da aber die Massen der Planeten, wenn auch sehr klein, doch nicht ganz unmerklich gegen die Masse der Sonne sind, so kann weder die Sonne in Ruhe bleiben, noch kann der Planetenlauf genau elliptisch sein.

So zusammengesetzt aber auch die in aller Schärfe genommenen Bewegungen der Sonne und der Planeten, so wie

der die letztern begleitenden Nebenplaneten, in der That sein mögen, so lassen sich doch mit Hülfe der Mechanik einige allgemeine Gesetze angeben, wonach sich diese Bewegungen stets auf das genaueste richten, Gesetze, die selbst dann befolgt werden würden, wenn die anziehende Kraft nicht dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, sondern auf irgend eine andere Weise von der Entfernung abhängig wäre. Die folgenden §§. sollen uns diese Gesetze näher kennen lehren.

I. Das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes.

§. 74.

Der Begriff und die Haupteigenschaften des Schwerpunktes lassen sich sehr einfach aus der Theorie von der Zusammensetznng gerader Linien ableiten. Da aus derselben Theorie die im ersten Abschnitte vorangestellten Sätze der Dynamik entwickelt worden sind, so halte ich es für angemessen, ehe ich zu dem in der Ueberschrift genannten Princip selbst fortgehe, zu zeigen, wie auf jene Theorie auch die Lehre vom Schwerpunkte gegründet werden kann, wenn ich auch die Hauptsätze dieser Lehre als meinen Lesern schon bekannt annehmen darf.

1) Ist S der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten A und B, so sind die geraden Linien SA und SB einander gleich und entgegengesetzt, und folglich die aus ihnen zusammengesetzte Linie null. Und nmgekehrt: Hat ein Punkt S gegen zwei andere A und B eine solche Lage, dass die Zusammensetzung von SA und SB Null giebt, so ist er der Mittelpunkt von AB.

Auf analoge Art kann man einen Punkt S den **Mittelpunkt** eines Systems von drei oder mehrern Punkten A, B, C, ... nennen, wenn er gegen diese also liegt, dass die aus den Linien SA, SB, SC, ... zusammengesetzte Linie null ist, d. h. dass von der gebrochenen Linie, welche dnrch diese Zusammensetzung sich bildet (§. 2.), der Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, und somit ein geschlossenes Vieleck entsteht.

2) *Eben so, wie ein System von nur zwei Punkten, kann auch ein System von mehrern Punkten nicht mehr als einen Mittelpunkt haben.* Denn sei, wenn es möglich wäre, von den n Punkten A, B, C, ... nächst S noch S' ein Mittelpunkt. Nun ist $S'A$ aus $S'S$ und SA zusammengesetzt (§. 2. *a.*), oder wie wir dieses der Kürze und leichteren Uebersicht wegen schreiben wollen:

$$S'A \equiv S'S + SA,$$

wo das statt ($=$) gesetzte Zeichen ($\equiv$) andeutet, dass die durch ($+$) angezeigte Addition oder Zusammensetzung nicht in arithmetischem, sondern in geometrischem Sinne, d. h. auch mit Rücksicht auf die Lage der zusammenzusetzenden Linien (vergleiche §. 22. Anmerkung), ausgeführt werden soll. Eben so ist

$$S'B \equiv S'S + SB,\ S'C \equiv S'S + SC, \text{ etc.}$$

Addirt man alle diese Formeln, was nach der Natur der geometrischen Zusammensetzung gestattet ist, so kommt:

$$S'A + S'B + \ldots \equiv n\,.\,S'S + SA + SB + \ldots.$$

Weil aber S der Mittelpunkt von A, B, ... sein soll, so ist die aus SA, SB, ... zusammengesetzte Linie null, oder

$$SA + SB + SC + \ldots \equiv 0.$$

Hiermit reducirt sich die vorige Formel auf

$$(n) \quad S'A + S'B + \ldots \equiv n\,.\,S'S,$$

d. h. die Zusammensetzung der von S' nach den Punkten des Systems gezogenen Linien giebt das $n$fache der von S' nach dem Mittelpunkte des Systems gezogenen, also nicht Null, wie es doch sein müsste, wenn auch S' ein Mittelpunkt wäre.

3) Zu den n Punkten A, B, ..., deren Mittelpunkt S ist, mögen jetzt noch irgend andere A', B', ... hinzutreten, und von allen diesen Punkten A, B, ..., A', B', ... sei S' der Mittelpunkt, so besteht zuerst in Bezug auf die Punkte A, B, ... allein die Relation (n), und nächstdem ist

$$S'A + S'B + \ldots + S'A' + S'B' + \ldots \equiv 0,$$

was sich vermöge (n) auf

$$n\,.\,S'S + S'A' + S'B' + \ldots \equiv 0$$

reducirt. Denkt man sich in dieser Formel statt $n\,.\,S'S$ das

aus n Gliedern bestehende Aggregat $S'S + S'S + \ldots$ geschrieben, so wird durch sie ausgedrückt, dass S' auch der Mittelpunkt von A', B', ... und von n in S vereinigten Punkten ist; d. h.

Der Mittelpunkt eines Systems von Punkten bleibt unverändert, wenn man einen Theil der Punkte in dem Mittelpunkte, den diese für sich haben, sich vereinigen lässt.

4) Besteht das System aus $p + q$ Punkten, von denen p in P und q in Q vereinigt sind, und ist S der Mittelpunkt des Systems, so muss

$$p \,.\, SP + q \,.\, SQ \equiv 0$$

sein, d. h. das $p$fache der Linie SP und das $q$fache der Linie SQ müssen einander gleich und entgegengesetzt sein. Sind daher die Punkte P, Q und die Zahlen p, q gegeben, so wird man S finden, wenn man die Linie PQ in S so theilt, dass $PS : SQ = q : p$.

§. 75.

Mit Hülfe der zwei letzten Sätze des vorigen §. ist es immer leicht von einer beliebigen Anzahl von Punkten den Mittelpunkt zu bestimmen. Soll von drei Punkten A, B, C (Fig. 27.) der Mittelpunkt gefunden werden, so halbire man zuerst AB in S'. Der Mittelpunkt S'' von A, B, C ist alsdann einerlei mit dem von C und von zwei in S' vereinigten Punkten; er wird daher gefunden, wenn man $S'C$ in S'' in dem Verhältnisse 1 : 2 theilt.

Kommt zu A, B, C noch ein vierter Punkt D, so ist der Mittelpunkt von allen vieren einerlei mit dem von D und von drei in S'' zusammenfallenden Punkten und ergiebt sich daher, wenn man $S''D$ in dem Verhältnisse 1 : 3 theilt; und so fort bei noch mehrern Punkten.

Die Ordnung übrigens, nach welcher man die Punkte eines Systems, um dessen Mittelpunkt zu finden, nach und nach in Betrachtung zieht, ist willkührlich, weil das System nicht mehr als einen Mittelpunkt hat.

Der Mittelpunkt eines Systems kann auch sehr einfach durch Anwendung von Coordinaten gefunden werden. Zum

Verständnisse dieses Verfahrens müssen aber zuvor einige Sätze aus der Lehre von den Projectionen eingeschaltet werden.

Seien A, B, C, ... mehrere Punkte im Raume. Man projicire sie, sei es durch Parallellinien auf eine Ebene, oder durch Parallelebenen auf eine gerade Linie, und nenne A', B', C', ... die projicirten Punkte. Alsdann erhellet aus den ersten Elementen, dass in dem einen, wie in dem andern Falle, wenn $AB \equiv CD$, auch $A'B' \equiv C'D'$ ist; d. h. Sind zwei gerade Linien einander gleich und parallel, so sind es auch ihre Projectionen.

Ist ferner eine Linie GH aus mehrern andern AB, CD, EF zusammengesetzt, so ist auch die Projection der erstern aus den Projectionen der letztern zusammengesetzt. Denn denkt man sich jede der Linien AB, CD, EF parallel mit sich fortgetragen, bis A mit G, C mit B, E mit D zusammenfällt, so muss zu Folge der Voraussetzung auch F mit H zusammenfallen. Bei dieser Lage der vier Linien, wo sie ein geschlossenes Viereck bilden, thuen dasselbe auch ihre Projectionen, und es ist folglich die Projection von GH aus den Projectionen der drei übrigen zusammengesetzt. Dieselbe Relation zwischen den Projectionen muss daher auch bei der anfänglichen Lage der Linien statt gefunden haben, weil nach dem vorigen Satze durch die parallele Fortbewegung der Linien die Richtung und Grösse ihrer Projectionen sich nicht geändert hat.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass, wenn die Zusammensetzung mehrerer Linien null giebt, sich auch die Zusammensetzung ihrer Projectionen auf null reducirt. Ist daher $SA + SB + SC + \ldots \equiv 0$, so ist auch $S'A' + S'B' + S'C' + \ldots \equiv 0$, d. h. *die Projection S' des Mittelpunktes S mehrerer Punkte A, B, C, ... ist zugleich der Mittelpunkt der Projectionen A', B', C', ... dieser Punkte.*

Man füge nun ein System dreier coordinirter Axen X, Y, Z hinzu und setze in Bezug auf dasselbe die Coordinaten von S, $= \sigma, \sigma', \sigma''$; die von A, $= \alpha, \alpha', \alpha''$; die von B, $= \beta, \beta', \beta''$; etc. Man betrachte ferner S', A', B', ... als

die Projectionen von S, A, B, ... auf X durch Parallelebenen mit YZ, so ist, wenn O den Anfangspunkt der Coordinaten oder den gemeinsamen Durchschnitt von X, Y, Z bezeichnet: $OS' = \sigma$, $OA' = \alpha$, $OB' = \beta$, etc.; folglich $S'A' = \alpha - \sigma$, $S'B' = \beta - \sigma$, etc. Da letztere Linien alle in derselben Geraden X liegen, so ist die aus ihnen zusammengesetzte = ihrer algebraischen Summe $= \alpha + \beta + \ldots - n\sigma$, wo n, wie im Vorigen, = der Anzahl der Punkte A, B, ...; und weil diese Summe null sein soll, so wird

$$\sigma = \frac{1}{n}(\alpha + \beta + \ldots).$$

Ganz dieselbe Relation muss aber auch zwischen den Coordinaten in Bezug auf jede der beiden andern Axen statt haben, also:

$$\sigma' = \frac{1}{n}(\alpha' + \beta' + \ldots) \text{ und } \sigma'' = \frac{1}{n}(\alpha'' + \beta'' + \ldots),$$

wodurch die Coordinaten des Mittelpunkts gefunden sind.

Besteht das System aus $a + b + \ldots$ Punkten, von denen a in A, b in B, etc. vereinigt sind, so sind nach denselben Formeln die Coordinaten des Mittelpunkts S

$$\sigma = \frac{a\alpha + b\beta + \ldots}{a + b + \ldots}, \; \sigma' = \frac{a\alpha' + b\beta' + \ldots}{a + b + \ldots}, \; \sigma'' = \text{etc.}$$

Man bemerke noch, dass bei diesem System die geometrische Relation zwischen S, A, B, ... durch die Formel

$$a \,.\, SA + b \,.\, SB + \ldots \equiv 0$$

ausgedrückt wird.

§. 76.

Lassen wir jetzt die n Punkte A, B, C, ... sich beliebig zu bewegen anfangen und suchen die Art und Weise zu bestimmen, auf welche von ihren Bewegungen die Bewegung ihres Mittelpunkts S abhängt. Seien zu dem Ende S_0, A_0, B_0, C_0, ... und S_1, A_1, B_1, C_1, ... die Oerter, welche S, A, B, C, ... in zwei beliebigen Zeitpunkten T_0 und T_1 einnehmen. Nun ist (§. 2. a.), wie auch die vier Punkte A_0, S_0, S_1, A_1 liegen mögen:

$$A_0A_1 \equiv A_0S_0 + S_0S_1 + S_1A_1,$$ und eben so
$$B_0B_1 \equiv B_0S_0 + S_0S_1 + S_1B_1,$$
$$C_0C_1 \equiv C_0S_0 + S_0S_1 + S_1C_1,$$
u. s. w.

Addirt man diese n Formeln und berücksichtigt dabei, dass, weil S in jedem Zeitpunkte der Mittelpunkt von A, B, C, ... sein soll,

$S_1A_1 + S_1B_1 + S_1C_1 + \ldots \equiv 0$ und $S_0A_0 + S_0B_0 + \ldots \equiv 0$,
also auch $A_0S_0 + B_0S_0 + C_0S_0 + \ldots \equiv 0$ ist, so kommt:

$$(a)\quad A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1 + \ldots \equiv n \,.\, S_0S_1.$$

Um die Bedeutung dieses Resultats zu verstehen, denke man sich einen Punkt P hinzu, dessen Bewegung aus denen der Punkte A, B, C, ... zusammengesetzt sei. Nach der in §. 6. von der zusammengesetzten Bewegung gegebenen Definition ist dann für die Zeitpunkte T_0 und T_1:

$$P_0P_1 \equiv A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1 + \ldots,$$

folglich wegen (a) auch

$$P_0P_1 \equiv n \,.\, S_0S_1 \equiv S_0S_1 + S_0S_1 + \ldots.$$

Die aus den Bewegungen der n Punkte A, B, C, ... zusammengesetzte Bewegung und diejenige, welche erhalten wird, wenn man die Bewegung des Mittelpunkts S der n Punkte $n$mal mit ihr selbst zusammensetzt, sind daher einander gleich, indem jede von beiden gleich der Bewegung von P ist; oder kurz: die $n$fache Bewegung von S ist aus den Bewegungen von A, B, C, ... zusammengesetzt.

Es folgt hieraus weiter, dass in jedem Zeitpunkte die aus den Geschwindigkeiten von A, B, C, ... zusammengesetzte Geschwindigkeit und die $n$fache Geschwindigkeit von S einerlei Richtung und Grösse haben, nämlich die gleichzeitige Richtung und Grösse der Geschwindigkeit von P (§. 12.); d. h. die $n$fache Geschwindigkeit von S ist aus den Geschwindigkeiten von A, B, C, ... zusammengesetzt; und dasselbe gilt wörtlich auch von den beschleunigenden Kräften, durch welche die Bewegungen von S, A, B, C, ... hervorgebracht werden (§. 24.).

Wir wollen uns jetzt A, B, C, ... nicht mehr als einzelne Punkte des Systems, sondern als die Mittelpunkte von Partialsystemen von resp. a, b, c, ... Punkten denken, aus denen das ganze System, dessen Mittelpunkt, wie vorhin, S heisse, zusammengesetzt sei. Erhalten nun alle diese $a + b + c + \ldots$ Punkte irgend beliebige Bewegungen, und fangen damit auch A, B, C, ... und S sich zu bewegen an, so wird die Bewegung des S von den Bewegungen der A, B, C, ... dergestalt abhängen, dass für je zwei Zeitpnnkte T_0 und T_1

$$(a^*)\quad a \,.\, A_0A_1 + b \,.\, B_0B_1 + \ldots = (a + b + \ldots)\, S_0S_1 \text{ ist.}$$

Es erhellet dieses sogleich daraus, dass man nach §. 74. 3. für S denselben Ort und folglich auch dieselbe Bewegung findet, wenn man annimmt, dass die a Punkte, von denen A der Mittelpunkt ist, in A, eben so die folgenden b Punkte in ihrem Mittelpunkte B, u. s. w. vereinigt werden und in dieser Vereinigung mit A, B, ... fortgehen. Denn unter dieser Annahme wird durch (a^*) in Bezug auf das System von $a + b + c + \ldots$ Punkten dieselbe Relation, wie vorhin durch (a) rücksichtlich des Systems von n Punkten, ausgedrückt.

Aus (a^*) ist aber auf gleiche Art, wie vorhin aus (a), zu schliessen, dass die $(a + b + \ldots)$ fache Bewegung von S aus der a fachen Bewegung von A, der b fachen von B, u. s. w. zusammengesetzt ist, und dass dieselbe Beziehung zwischen den Ebensovielfachen der Geschwindigkeiten von S, A, B, ..., so wie auch der Kräfte, durch welche diese Bewegungen hervorgebracht werden, statt hat.

§. 77.

Zusätze. *a.* Die Bewegung eines Punktes P wird nach vorigem §. das a fache der Bewegung eines andern Punktes A genannt, wenn sie aus a einander und der Bewegung von A gleichen Bewegungen zusammengesetzt ist, und wenn daher für je zwei Zeitpunkte T_0 und T_1, $P_0P_1 \equiv a \,.\, A_0A_1$ ist. Die Zahl a ist hierbei eine ganze positive Zahl. Man sieht aber bald, dass die durch letztere Formel gegebene Defini-

tion sich ohne Widerspruch auch dann anwenden lässt, wenn a irgend eine gebrochene positive, ja selbst eine ganze oder gebrochene negative Zahl ist, in welchem letztern Falle die Linien $A_0 A_1$ und $P_0 P_1$ stets einander entgegengesetzte Richtungen haben müssen.

Sei in diesem allgemeinern Sinne das $a$fache der Bewegung von A dem $b$fachen der Bewegung von B gleich. Für irgend drei Zeitpunkte T_0, T_1 und T_2 wird dann sein:

$$a \,.\, A_0 A_1 \equiv b \,.\, B_0 B_1 \text{ und } a \,.\, A_1 A_2 \equiv b \,.\, B_1 B_2.$$

Die Dreiecke $A_0 A_1 A_2$ und $B_0 B_1 B_2$ (Fig. 28.) sind hiernach in dem Verhältnisse $b : a$ einander ähnlich und in direct oder verkehrt ähnlicher Lage, jenachdem der Exponent $b : a$ positiv oder negativ ist. Da dieses auch für je drei andere Zeitpunkte gilt, so schliessen wir: *dass wenn das $a$fache der Bewegung von A dem $b$fachen der Bewegung von B gleich ist, die Bahnen von A und B selbst in dem Verhältnisse $b : a$ einander ähnlich sind und direct oder verkehrt ähnlich liegen, jenachdem $b : a$ positiv oder negativ ist, und dass A und B in jedem Zeitpunkte sich an ähnlich liegenden Stellen ihrer Bahnen befinden.*

Eine weitere Folge hiervon ist, *dass auch die Geschwindigkeiten von A und B sich wie b und a verhalten und einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, jenachdem $b : a$ positiv oder negativ ist. Und dasselbe gilt auch von den Kräften, durch welche die Bewegungen von A und B erzeugt werden.* Denn indem man $T_0 T_1$ und $T_1 T_2$ als zwei einander gleiche Zeitelemente annimmt, sind die zur Zeit T_1 statt findenden Kräfte sowohl, als die Geschwindigkeiten, nichts anderes als Linien, welche aus den in dem Verhältnisse $b : a$ einander ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren $A_0 A_1 A_2$ und $B_0 B_1 B_2$ auf gleiche Weise bestimmt werden, und daher ebenfalls in dem Verhältnisse $b : a$ zu einander stehen und eine ähnliche d. i. parallele Lage haben müssen.

b. Sind die Bewegungen zweier Punkte A und B in dem Verhältnisse $1 : -1$, also einander gleich und entgegengesetzt, ist also für je zwei Zeitpunkte $A_0 A_1 \equiv B_1 B_0$, so ist die aus ihnen zusammengesetzte Bewegung, folglich auch

die des Mittelpunktes von A und B, null, d. h. der Mittelpunkt ruht.

Sind a und b ganze positive Zahlen, und ist das $a$fache der Bewegung von A dem $b$fachen der Bewegung von B gleich und entgegengesetzt, so muss aus gleichem Grunde der Mittelpunkt von A und B, wenn dabei A als ein $a$facher und B als ein $b$facher Punkt genommen wird, in Ruhe sein; d. h. *Stehen die Bewegungen zweier Punkte A und B in dem numerischen Verhältnisse — b : a, so schneiden sich alle successiven Lagen der Linie AB in einem und demselben Punkte S und theilen sich daselbst in dem Verhältnisse a : b.* — Man gewahrt leicht, dass dieser Satz auch dann gilt, wenn das Verhältniss — $b : a$ irrational, so wie auch dann, wenn es positiv ist, in welchem Falle S ausserhalb A und B liegt; und dass dieser Punkt S in jedem Falle gegen die zwei von A und B beschriebenen Curven eine ähnliche Lage hat.

c. Von zwei Bewegungen, die nach der jetzt erklärten Weise in einem numerischen Verhältnisse zu einander stehen, kann man bezeichnender sagen, dass sie in diesem Verhältnisse einander ähnlich sind. So wie ferner nach §. 4. A gegen F dieselbe Bewegung, wie B gegen G hat, wenn stets $FA \equiv GB$ ist, so kann man die relativen Bewegungen von A gegen F und von B gegen G in dem Verhältnisse $b : a$ einander ähnlich nennen, wenn stets $a \,.\, FA \equiv b \,.\, GB$ ist. Sind F und G feste Punkte, so sind in demselben Verhältnisse auch die absoluten Bewegungen von A und B einander ähnlich.

Hiernach sind z. B. die Bewegungen eines $a$fachen und eines $b$fachen Punktes um ihren Mittelpunkt stets in dem Verhältnisse — $b : a$ einander ähnlich; ruht aber der Mittelpunkt, so sind es auch die absoluten Bewegungen.

Anmerkung. Aus dem Bisherigen geht hervor, wie auf den Begriff der Bewegung alle vier Species der Rechenkunst angewendet werden können. Die Addition oder Zusammensetzung der Bewegungen ist bereits in §. 6. erklärt worden. Von der Bewegung eines Punktes A die Bewegung eines andern B subtrahiren wird nichts anderes heissen, als die Bewegung eines Punktes C bestimmen, welche, zu der letztern addirt, die erstere

giebt. Es wird daher für je zwei Zeitpunkte $A_0 A_1 \equiv B_0 B_1 + C_0 C_1$ sein müssen, wofür man auch

$$A_0 A_1 - B_0 B_1 \equiv C_0 C_1 \text{ oder } A_0 A_1 + B_1 B_0 \equiv C_0 C_1$$

schreiben kann. — Die Multiplication einer Bewegung mit irgend einer reellen Zahl ist im Vorstehenden erklärt worden. Eine Bewegung aber mit einer Zahl a dividiren, ist eben so viel, als sie mit der Zahl $\frac{1}{a}$ multipliciren.

§. 78.

Der Mittelpunkt eines Systems materieller Punkte, deren Massen insgesammt einander gleich sind, wird der Schwerpunkt des Systems genannt.

Einen materiellen Körper von endlicher Ausdehnung kann man sich immer als ein Aggregat von Theilchen denken, die an Masse sämmtlich einander gleich und so klein sind, dass ihre Dimensionen gegen die des Körpers nicht in Betracht kommen, dass also sie selbst als materielle Punkte angesehen werden können. Der Mittelpunkt aller dieser Theilchen wird der Schwerpunkt des Körpers zu nennen sein.

Bei einer Kugel, die in gleicher Entfernung von ihrem Mittelpunkte gleiche Dichtigkeit hat, fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen. Denn man kann die Theilchen von gleicher Masse, in welche man sich eine solche Kugel zerlegt denkt, paarweise so zusammennehmen, dass die zwei Theilchen jedes Paares den Mittelpunkt der Kugel in der Mitte zwischen sich liegen haben; es wird daher auch von allen Paaren in Vereinigung der Mittelpunkt identisch mit dem Mittelpnnkte der Kugel sein. — Auf gleiche Art wird auch jeder andere Körper, der einen Mittelpunkt der Figur hat, und dessen Masse in Bezug auf diesen Punkt symmetrisch vertheilt ist, denselben Punkt zu seinem Schwerpunkte haben. Insbesondere müssen daher bei jedem Himmelskörper (§. 69.) sein geometrischer Mittelpunkt und sein Schwerpunkt identische Pnnkte sein.

Seien A, B, C, ... die Schwerpunkte mehrerer Körper. Man denke sich diese Körper in unendlich kleine an Masse

einander gleiche Theilchen zerlegt; bestehe der erste ans a, der zweite aus b, der dritte aus c, etc. solcher Theilchen, und verhalten sich daher die Zahlen a, b, c, ... wie die Massen der Körper. Soll nun der Schwerpunkt S' aller Theilchen der zwei ersten Körper, oder kurz: der gemeinschaftliche Schwerpunkt dieser Körper, gefunden werden, so hat man nach §. 74. 3. u. 4. die Linie AB in S' im Verhältnisse $b : a$ zu theilen; d. h. *der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier Körper liegt mit den Schwerpunkten der einzelnen in gerader Linie und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältnisse der Massen der Körper.* — Man kann nun die zwei ersten Körper als einen einzigen betrachten, dessen Schwerpunkt S' ist, und dessen Masse aus $a + b$ Theilchen besteht, und wird hiernach den gemeinschaftlichen Schwerpunkt S'' der drei ersten Körper finden, wenn man $S'C$ in S'' im Verhältnisse $c : a + b$, d. i. im Verhältnisse der Masse des dritten Körpers zur Summe der Massen der beiden ersten, theilt; und so fort bei noch mehrern Körpern. Der somit erhaltene Schwerpunkt wird aber stets derselbe sein, welches auch die Ordnung ist, in welcher man die Körper nach und nach berücksichtigt. Denn eben so wenig, als ein System von Punkten mehr als einen Mittelpunkt haben kann, kann auch ein einzelner Körper, oder ein System von Körpern mehr als einen Schwerpunkt haben.

Zusatz. Statt dieses graphischen Verfahrens den Schwerpunkt S zu finden, kann man auch die in §. 75. entwickelten Formeln zur Berechnung der Coordinaten von S aus denen von A, B, ... anwenden. Dass man in diesen Formeln die Coëfficienten a, b, ... jetzt als die Massen der Körper zu nehmen hat, bedarf keiner Erörterung.

Eben so erhellet von selbst, dass, a, b, ... in derselben Bedeutung genommen, die in §. 75. für den Mittelpunkt aufgestellte Formel

$$a \, . \, SA + b \, . \, SB + \ldots \equiv 0$$

für den Schwerpunkt gilt, und dass auf gleiche Art, wie wir dort in Bezug auf den Mittelpunkt fanden, die Projection des Schwerpunktes eines Systems von Körpern, sei es auf

eine Ebene, oder auf eine Gerade, einerlei mit dem Schwerpunkte der projicirten Körper ist.

§. 79.

Bedeuten wiederum A, B, C, ... die Schwerpunkte mehrerer Körper, die aus resp. a, b, c, ... der Masse nach sämmtlich einander gleichen Theilchen bestehen, so ist bei beliebigen Bewegungen dieser Körper die $(a + b + c + \ldots)$ fache Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes S aus der $a$fachen Bewegung von A, der $b$fachen von B, der $c$fachen von C, etc. zusammengesetzt (§. 76.), oder, weil es hierbei nur auf die gegenseitigen Verhältnisse der Zahlen a, b, c, ... ankommt, und diese sich wie die Massen der Körper verhalten:

Bei einem System sich beliebig bewegender Körper ist die mit der Summe ihrer Massen multiplicirte Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes zusammengesetzt aus den mit den resp. Massen multiplicirten Bewegungen der Schwerpunkte der einzelnen Körper.

Und dieselbe Relation, wie zwischen den Bewegungen der Schwerpunkte, findet auch zwischen ihren Geschwindigkeiten und den sie beschleunigenden Kräften statt. Da aber das Product aus der Masse in die beschleunigende Kraft die bewegende Kraft genannt wird (§. 61.), so können wir unsern Satz, insofern er die Kräfte betrifft, auch also ausdrücken:

Der Schwerpunkt eines Systems sich irgendwie bewegender Körper bewegt sich eben so, als wenn in ihm die Massen der Körper vereinigt wären, und auf diese vereinigte Masse eine bewegende Kraft wirkte, zusammengesetzt aus denen, welche die Bewegungen der Körper selbst hervorbringen; oder — was dasselbe ist — *der Schwerpunkt bewegt sich eben so, als wenn den bewegenden Kräften der Körper gleiche und parallele Kräfte auf die in ihm vereinigte Masse wirkten.*

Folgerungen. a. Von mehrern sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Körpern bewegt sich auch der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig, oder ist in Ruhe.

Denn da die Geschwindigkeit jedes Körpers stets dieselbe Richtung und Grösse haben soll, so muss auch die aus diesen mit den resp. Massen multiplicirten Geschwindigkeiten zusammengesetzte Geschwindigkeit der Richtung und Grösse nach constant sein. In dem besondern Falle, wenn die Zusammensetzung Null giebt, ruht der Schwerpunkt.

b. Da bei einem System sich anziehender Körper die bewegenden Kräfte, mit denen je zwei derselben gegen einander getrieben werden, einander gleich und entgegengesetzt sind (§. 61.), so wird durch sie die Bewegung des Schwerpunktes nicht geändert, und wir schliessen daher:

Der Schwerpunkt eines Systems von Körpern, auf welche keine andern Kräfte, als ihre gegenseitigen Anziehungen, wirken, bewegt sich geradlinig und gleichförmig, oder ist in Ruhe.

Man nennt diesen Satz, der übrigens, wie von sich anziehenden, gleicherweise auch von sich abstossenden Körpern gelten muss, das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes. Ihm zufolge können wir die Bewegung des Schwerpunktes aller zu unserm Sonnensystem gehörigen Körper als geradlinig und gleichförmig, wenigstens auf lange Zeit hinaus, ansehen. Denn die Kräfte, mit denen diese Körper von andern Sonnen angezogen werden mögen, sind wegen der unermesslichen Entfernungen jener Sonnen von uns so gering, dass ihre Wirkungen vielleicht erst nach Jahrtausenden für uns merkbar werden. Bis jetzt wenigstens hat man kaum erst eine Spur von der Richtung, nach welcher sich unser Sonnensystem bewegt, wahrnehmen können.

c. Sind mehrere sich anziehende Körper, und folglich auch ihr Schwerpunkt, anfangs in Ruhe, so wird letzterer auch bei den darauf folgenden durch die Anziehung bewirkten Bewegungen der Körper in Ruhe verharren, und die Körper werden, durch ihre Anziehung einander immer näher gebracht, zuletzt gleichzeitig in ihm zusammentreffen.

§. 80.

Es wird nicht überflüssig sein, das Princip vom Schwerpunkte uns an dem möglich einfachsten Falle, an einem

System von nur zwei Körpern, zu erläutern. Setzen wir zuerst, dass dieselben einander nicht anziehen, und dass daher ihre Schwerpunkte, welche A und B heissen, sich geradlinig und gleichförmig bewegen. In Bezug auf einen beliebig wo angenommenen festen Punkt C (Fig. 29.) habe ein anderer D dieselbe Bewegung, welche B gegen A hat; sei also stets $CD \equiv AB$ (§. 4.). Weil auf A und B keine Kräfte wirken sollen, so ist auch bei der Bewegung von D die Kraft $= 0$ (§. 24. *a.*), und daher diese Bewegung ebenfalls geradlinig und gleichförmig. Es beschreibt mithin die Linie CD eine Ebene, und dieser Ebene ist die Linie AB, $\equiv CD$, stets parallel; also:

„Bewegen sich zwei Punkte (A und B) geradlinig und gleichförmig, so ist die sie verbindende Gerade stets einer und derselben Ebene parallel."

Um die Lage dieser Ebene zu bestimmen, seien A_0, B_0 und A_1, B_1 die Oerter von A, B in irgend zwei Zeitpunkten T_0 und T_1, und die gesuchte Ebene muss so liegen, dass sie mit A_0B_0 und A_1B_1, als zwei successiven Lagen der AB, zugleich parallel ist.

Setzt man $T_0T_1 =$ der Zeiteinheit, so werden durch A_0A_1 und B_0B_1 die Geschwindigkeiten von A und B dargestellt; und wenn man noch $CD_0 \equiv A_0B_0$ und $CD_1 \equiv A_1B_1$ macht, so ist D_0D_1 die Geschwindigkeit von D, oder auch von B bei der relativen Bewegung dieses Punktes gegen A.

Seien a und b die Massen der beiden Körper und S ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt. Theilt man daher A_0B_0 in S_0, A_1B_1 in S_1, etc. in dem Verhältnisse $b : a$, so sind S_0, S_1, etc. die Oerter von S in den Zeitpunkten T_0, T_1, etc. Wegen der geradlinigen und gleichförmigen Bewegungen von A und B bewegt sich auch S geradlinig und gleichförmig (§. 79. *a.*), welches, in Verbindung mit dem Vorigen, die nachstehenden geometrischen Sätze giebt:

„Werden zwei gerade Linien A_0A_2 und B_0B_2 in A_1 und B_1 in gleichen Verhältnissen ($= T_0T_1 : T_1T_2$) getheilt, so sind die drei geraden Linien A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 einer und derselben Ebene parallel."

„Je drei Punkte S_0, S_1, S_2, durch welche diese drei Linien in gleichen Verhältnissen ($= b : a$) getheilt werden, liegen in gerader Linie, und dieses so, dass $S_0 S_2$ in S_1 in demselben Verhältnisse, wie $A_0 A_2$ in A_1 oder $B_0 B_2$ in B_1, getheilt wird.“

„Die drei Linien $A_0 A_2$, $B_0 B_2$ und $S_0 S_2$ sind gleichfalls einer und derselben Ebene parallel.“

Der dritte Satz folgt aus dem ersten, weil $A_0 B_0$ und $A_2 B_2$ in S_0 und S_2 in gleichen Verhältnissen getheilt werden *).

§. 81.

Nehmen wir jetzt an, dass die zwei Körper, deren Schwerpunkte A und B, und deren Massen a und b sind, nach dem Newton'schen Gesetze einander anziehen, und dass daher auf A und B die resp. nach B und A gerichteten Kräfte $Kb : AB^2$ und $Ka : AB^2$ wirken. Zur Zeit T_0 seien A_0 und B_0 die Oerter von A und B, und $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ ihre Geschwindigkeiten. Um hieraus (§. 25.) die Bewegungen von A und B zu bestimmen, setze man wie vorhin, dass um einen festen Punkt C ein anderer D dieselbe Bewegung wie B gegen A habe, und bestimme D_0 und D_1, indem man $CD_0 \equiv A_0 B_0$ und $CD_1 \equiv A_1 B_1$ macht. Hiernach ist zur Zeit T_0, D_0 der Ort und $D_0 D_1$ die Geschwindigkeit von D; die auf D wirkende Kraft aber ist $= K(a+b) : AB^2$ (§. 65.) $= K(a+b) : CD^2$, und nach C gerichtet. Der Punkt D beschreibt demnach mit constanter Flächengeschwindigkeit $= CD_0 D_1$ um C, als den einen Brennpunkt, einen Kegelschnitt, der von $D_0 D_1$ in D_0, wo sich D zur Zeit T_0 befindet, berührt wird, und dessen halber Parameter (§. 55.)

$$= \frac{cc}{Trr} = \frac{cc}{K(a+b)} = \frac{(2 \,.\, CD_0 D_1)^2}{K(a+b)} \text{ ist.}$$

*) In diesen aus der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung zweier Körper und ihres Schwerpunktes entspringenden Sätzen sind, wie man sieht, zugleich die Grundeigenschaften des hyperbolischen Paraboloids oder der Fläche enthalten, welche von einer Geraden erzeugt wird, die, stets dieselben zwei Geraden schneidend, sich parallel mit einer Ebene fortbewegt.

Hiernach kann der Ort von D für jeden Zeitpunkt als bekannt angesehen werden. Dasselbe gilt auch von dem Orte des Schwerpunkts S der beiden Körper. Denn die Bewegung von S ist geradlinig und gleichförmig und wird aus den Oertern A_0, B_0 der Punkte A, B und ihren Geschwindigkeiten A_0A_1, B_0B_1 zur Zeit T_0 eben so, wie im vorigen §., gefunden, weil die gegenseitige Anziehung der Körper auf seine Bewegung keinen Einfluss hat.

Mit den Oertern von D und S sind aber auch sogleich die von A und B gefunden. Denn weil die Linie $AB \equiv CD$ ist und von S in dem Verhältnisse $b : a$ getheilt wird, so hat man nur $SA \equiv \frac{b}{a+b}\, DC$ und $SB \equiv \frac{a}{a+b}\, CD$ zu machen.

Die Bewegungen von A und B gegen S sind demnach einander und der von D gegen C oder von B gegen A in den Verhältnissen $1 - b : a : a+b$ ähnlich (§. 77. c.). Um sich von diesen Bewegungen eine anschauliche Vorstellung zu machen, denke man sich durch S eine mit CD_0D_1 parallele Ebene gelegt. Indem dieselbe, sich parallel bleibend, mit S geradlinig und gleichförmig fortgeht, bewegen sich in ihr A und B um den zwischen ihnen liegenden Punkt S, als den gemeinschaftlichen Brennpunkt, in einander ähnlichen, aber verkehrt liegenden Kegelschnitten, deren Dimensionen sich umgekehrt wie die Massen von A und B verhalten.

II. Das Princip der Erhaltung der Flächen.

§. 82.

Es ist dieses Princip eine Verallgemeinerung des schon in §. 37. bewiesenen Satzes, dass die Flächengeschwindigkeit des Radius Vector eines Körpers durch eine Kraft, welche in der Richtung des Radius wirkt, nicht geändert wird. Um das Princip jetzt in seiner Allgemeinheit zu entwickeln, wollen wir uns zuerst einen sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Körper A denken und diese Bewegung auf einen irgendwo angenommenen festen Punkt O (Fig. 30.) beziehen. Weil Dreiecke von gleicher Höhe sich

9*

wie ihre Grundlinien verhalten, so wird bei der gedachten Bewegung der nach dem Körper von O aus gezogene Radius OA der Zeit proportionale Flächen beschreiben, in jeder Zeiteinheit eine Fläche $= OFG$, wenn FG der von A in einer Zeiteinheit beschriebene Weg ist; mit andern Worten: es wird OFG die constante Flächengeschwindigkeit des Radius sein, wenn FG die constante Geschwindigkeit des Körpers ist.

Erhalte nun der Körper, in F angelangt, einen Stoss, welcher ihm eine in der Ebene OFG begriffene Geschwindigkeit $\equiv FH$ ertheile. Man construire das Parallelogramm $HFGI$, so ist vom Zeitpunkte des Stosses an FI die Geschwindigkeit des Körpers und OFI die Flächengeschwindigkeit des Radius. Nach §. 37. *b.* ist aber mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen — eine Rücksicht, die auch im später Folgenden nie vernachlässigt werden darf — das Dreieck $OFI = OFG + OFH$, d. h. die neue Flächengeschwindigkeit ist die Summe der anfänglichen und derjenigen, welche in Folge des Stosses allein statt haben würde.

Zusatz. Man ziehe in der Ebene OFG von F aus noch beliebig die Linie FK und construire das Parallelogramm $IFKL$, so ist das Dreieck $OFL = OFI + OFK = OFG + OFH + OFK$. Dabei ist FL aus FI und FK, d. i. aus FG, FH und FK zusammengesetzt, weil es FI aus FG und FH ist. Ist daher von mehrern von einem Punkte F ausgehenden und in einer Ebene enthaltenen geraden Linien die eine FL aus den übrigen FG, FH, FK zusammengesetzt, so ist auch von den Dreiecken, welche diese Linien zu Grundlinien und einen beliebigen Punkt O der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, das Dreieck über der erstern Linie der Summe der Dreiecke über den letztern gleich. — Giebt die Zusammensetzung der Linien FG, FH, ... Null, so ist auch die Summe der Dreiecke OFG, OFH, ... $= 0$.

§. 83.

Betrachten wir jetzt zwei sich in einer Ebene geradlinig und gleichförmig bewegende Körper A und B; seien FG und PQ (Fig. 31.) die Geschwindigkeiten derselben, also

OFG und *OPQ* die Flächengeschwindigkeiten in Bezug auf den beliebigen Punkt *O* der Ebene. Seien ferner *F* und *P* zwei gleichzeitige Oerter der Körper. In diesen angelangt, sollen sie nach direct entgegengesetzten Richtungen zwei einander (statisch) gleiche Stösse erhalten, also Stösse, welche ihnen nach *FP* nnd *PF* gerichtete Geschwindigkeiten *FH* und *PR* ertheilen, die sich umgekehrt wie die Massen *a* und *b* von *A* und *B* verhalten. Vom Zeitpunkte der Stösse an werden nach vorigem §. die Flächengeschwindigkeiten

$$= OFG + OFH \text{ und } = OPQ + OPR$$

sein. Es verhalten sich aber die Dreiecke *OFH* und *OPR* ihren absoluten Werthen nach wie $FH : PR = b : a$ und haben entgegengesetzte Zeichen, weil die Richtungen von *FH* und *PR* einander entgegengesetzt sind. Mithin ist $a \,.\, OFH + b \,.\, OPR = 0$, und folglich

$$a\,(OFG + OFH) + b\,(OPQ + OPR) = a \,.\, OFG + b \,.\, OPQ,$$

d. h. die Summe der Flächengeschwindigkeiten, jede multiplicirt mit der Masse des Körpers, dem sie zugehört, ist durch die Stösse nicht geändert worden.

Eben so wenig wird diese Summe sich ändern, wenn die Körper noch mehrere Male, jedesmal gleichzeitig, zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Stösse erhalten; also auch nicht, wenn sie sich anziehen (vergleiche §. 61.). Hat man demnach zwei sich in einer Ebene bewegende Körper, auf welche keine andern stetigen Kräfte, als ihre gegenseitige Anziehung, wirken, und multiplicirt man die auf irgend einen festen Pnnkt der Ebene bezogene Flächengeschwindigkeit eines jeden mit seiner Masse, so ist, wie auch die Anziehung von der gegenseitigen Entfernung der Körper abhängen mag, die Summe dieser Producte eine während der ganzen Bewegung constant bleibende Grösse; oder mit andern Worten, da jede mit constanter Geschwindigkeit sich ändernde Grösse der Zeit proportional zu- oder abnimmt: die Snmme der von irgend einer Zeit an von den Radien der beiden Körper beschriebenen und mit ihren Massen multiplicirten Flächen wächst der Zeit proportional.

§. 84.

Das im vorigen §. erhaltene Resultat lässt sich leicht auf drei und mehrere sich in einer Ebene bewegende Körper ausdehnen. Denn setzen wir zuerst, dass die drei Körper A, B, C sich nicht anziehen, und sich daher jeder geradlinig und gleichförmig bewege, so ist von den Flächengeschwindigkeiten der Radien OA, OB, OC jede für sich constant, also auch die Summe der Producte aus ihnen in die resp. Massen der Körper. Auch wird diese Summe nach vorigem §. unverändert bleiben, wenn irgend zweien der drei Körper gleichzeitig zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Stösse ertheilt werden; also auch dann, wenn sich Stösse dieser Art, sei es an demselben Körperpaare, oder abwechselnd an verschiedenen Paaren, wiederholen; also auch dann, wenn sich die drei Körper anziehen. Denn man kann sich die gegenseitige Anziehung von A, B und C offenbar auch so vorstellen, dass in unendlich kleinen Intervallen hintereinander zuerst etwa A und B, hierauf A und C, hierauf B und C, dann wiederum A und B, und in dieser Ordnung fort, durch gleiche Stösse gegen einander getrieben werden.

Auf ähnliche Art ist der Beweis bei noch mehrern sich anziehenden Körpern zu führen.

§. 85.

Bewegen sich die einander anziehenden Körper A, B, C, ... nicht in einer Ebene, so seien A', B', C', ... ihnen an Masse gleiche Körper, die sich in einer beliebig gewählten Ebene, als die rechtwinkligen Projectionen von A, B, C, ... auf diese Ebene, bewegen. Die Kräfte, wodurch diese letztern Bewegungen erzeugt werden, sind nach §. 24. *b.* den auf A, B, C, ... wirkenden und auf die Ebene projicirten Kräften gleich. Da nun wegen der gegenseitigen Anziehung, von A und B z. B., auf A und B nach den Richtungen AB und BA zwei einander gleiche bewegende Kräfte wirken, so werden auch A' und B' von zwei einander gleichen bewegenden Kräften gegen einander getrieben, nämlich

von Kräften, die den auf A und B wirkenden und mit dem Cosinus der Neigung der Linie AB gegen die Ebene multiplicirten Kräften gleich sind. Die Körper A', B', C', ... bewegen sich daher in der Ebene gleichfalls als einander anziehend, mithin nach dem vorhin entwickelten Gesetze, und wir schliessen daraus:

Hat man ein System sich bewegender Körper, auf welche bloss ihre gegenseitigen Anziehungen wirken, zieht man von einem beliebigen festen Punkte nach den einzelnen Körpern Radien und projicirt dieselben auf eine beliebig durch den Punkt gelegte feste Ebene, so ist die Summe der Producte aus der Masse jedes Körpers in die Flächengeschwindigkeit der Projection seines Radius constant, oder es wächst die Summe der Producte aus der Masse jedes Körpers in die von der Projection seines Radius in der Ebene beschriebene Fläche der Zeit proportional.

Dies ist der Satz, welchen man das Princip der Erhaltung der Flächen nennt.

§. 86.

Die nach diesem Princip bei jedem System sich anziehender Körper von einem Zeitpunkte zum andern constante Summe von Producten — wir wollen sie kurz das Moment des Systems nennen — hängt von der Wahl der festen Ebene und des darin liegenden festen Punktes O ab und wird für verschiedene Annahmen jener Ebene und dieses Punktes im Allgemeinen verschiedene Werthe erhalten.

Untersuchen wir zuerst, wie sich das Moment ändert, wenn es bei unverändert bleibender Ebene auf verschiedene Punkte derselben bezogen wird. Seien zu dem Ende A_0, B_0, ... und S_0 (Fig. 32.) die rechtwinkligen Projectionen der sich anziehenden Körper A, B, ... und ihres Schwerpunktes S auf die Ebene zu einer gewissen Zeit; A_0A_1, B_0B_1, ... S_0S_1 die Projectionen der gleichzeitig statt habenden Geschwindigkeiten von A, B, ... und S. Nun ist, wo auch

der Punkt O in der Ebene liegen mag, die Fläche des Vierecks

$$A_0 A_1 S_1 S_0 = OA_0 A_1 + OA_1 S_1 + OS_1 S_0 + OS_0 A_0.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellet augenblicklich, sobald die zwei Diagonalen $A_0 S_1$ und $A_1 S_0$ des Vierecks sich innerhalb ihrer Endpunkte schneiden, und der Punkt O innerhalb des Vierecks liegt; sie gilt aber, mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen, auch für jede andere Lage der Punkte A_0, A_1, ... und O.

Auf gleiche Art ist die Vierecksfläche

$$B_0 B_1 S_1 S_0 = OB_0 B_1 + OB_1 S_1 + OS_1 S_0 + OS_0 B_0,$$

u. s. w. Man multiplicire diese Gleichungen resp. mit den Massen a, b, ... der Körper, addire sie hierauf und setze

$$a \, . \, A_0 A_1 S_1 S_0 + b \, . \, B_0 B_1 S_1 S_0 + \ldots = Q \text{ und}$$
$$a \, . \, OA_0 A_1 + b \, . \, OB_0 B_1 + \ldots = M,$$

wo also M das Moment des Systems in Bezug auf den Punkt O der Ebene ausdrückt, so kommt:

$$Q = M + (a + b + \ldots)\, OS_1 S_0.$$

Denn weil S der Schwerpunkt der Massen a, b, ... in A, B, ... ist, so ist auch in der Projection S_0 der Schwerpunkt der in A_0, B_0, ... befindlichen Massen (§. 78. Zusatz), folglich (ebendaselbst)

$$a \, . \, S_0 A_0 + b \, . \, S_0 B_0 + \ldots \equiv 0, \text{ folglich (§. 82. Zusatz)}$$
$$a \, . \, OS_0 A_0 + b \, . \, OS_0 B_0 + \ldots = 0, \text{ und eben so}$$
$$a \, . \, OS_1 A_1 + b \, . \, OS_1 B_1 + \ldots = 0.$$

Beziehen wir jetzt das System auf den Punkt O' der Ebene und setzen rücksichtlich desselben das Moment $= M'$, so findet sich ähnlicherweise:

$$Q = M' + (a + b + \ldots)\, O'S_1 S_0;$$

folglich $M' - M = (a + b + \ldots)\,(OS_1 S_0 - O'S_1 S_0)$

$$= s\,(OS_1 S_0 + O'S_0 S_1) = s \, . \, OS_1 O'S_0,$$

wo $s = a + b + \ldots$. Es wird hierdurch der merkwürdige Satz ausgedrückt, *dass für je zwei Punkte derselben Ebene der Unterschied der darauf bezogenen Momente des Systems dem mit der Massensumme multiplicirten Viereck gleich ist,*

welches die Linie von dem einen Punkte zum andern und die Linie, welche die Geschwindigkeit des Schwerpunkts darstellt, zu Diagonalen hat.

Folgerung. Für $S_0 S_1 = 0$ wird $M = M'$; d. h. *Ruht der Schwerpunkt, so hat das Moment für alle Punkte einer und derselben Ebene gleiche Werthe.*

§. 87.

Behalten wir jetzt den Punkt O ungeändert bei, lassen aber die ihn enthaltende Ebene ihre Lage ändern und suchen die Abhängigkeit zwischen den auf diese verschiedenen Ebenen bezogenen Momenten zu bestimmen.

Wir wollen deshalb zuvor ein System ihrer Richtung und Grösse nach bestimmter gerader Linien f, g, h, ... in Betrachtung ziehen, von denen die erste f aus den übrigen g, h, ... zusammengesetzt sei, und die wir uns insgesammt, besserer Anschaulichkeit wegen, von einem und demselben Punkte O ausgehend denken. Diese Linien wollen wir rechtwinklig auf eine beliebig durch O gelegte Gerade γ projiciren und f_1, g_1, h_1, ... die Projectionen nennen, so ist der Voraussetzung zufolge und nach §. 75.

$$(a) \quad f_1 = g_1 + h_1 + \dots.$$

Werde nun zu diesem System von Linien γ, f, g, h, ... ein System durch O gelegter Ebenen Γ, F, G, H, ... hinzugefügt, welche auf den gleichnamigen Linien perpendikular stehen, und von denen man sich F, G, H, ... als begrenzte den Längen von f, g, h, ... proportionale Flächen denke, so dass, wenn die Linie $F : f$ zur Linieneinheit genommen und daher $F = f$ gesetzt wird, man auch $G = g$, $H = h$, etc. hat.

So wie vorhin f, g, h, ... auf γ, projicire man jetzt die Flächen F, G, H, ... auf die Ebene Γ und nenne F_1, G_1, H_1, ... diese Projectionen. Weil f auf F und γ auf Γ oder f_1 auf F_1 perpendikular steht, so sind die Winkel von f mit f_1 und von F mit F_1 einander gleich; es verhält sich daher die Linie f zu ihrer Projection f_1, wie die Fläche F zu der ihrigen F_1, und da $F = f$ gemacht worden, so ist

auch $F_1 = f_1$, und aus gleichem Grunde $G_1 = g_1$, $H_1 = h_1$, etc., folglich wegen (*a*)

$$F_1 = G_1 + H_1 + \ldots .$$

Sind demnach — so schliessen wir hieraus umgekehrt — *mehrere begrenzte Ebenen G, H, ... gegeben, errichtet man auf denselben ihnen proportionale Perpendikel g, h, ... und bestimmt die aus diesen zusammengesetzte Linie f, so hat eine auf f perpendikulare ebene Fläche F, welche mit f in demselben Verhältnisse, wie G mit g, etc. proportional ist, die Eigenschaft, dass die Summe der Projectionen der gegebenen Flächen G, H, ... auf eine beliebige Ebene Γ stets der Projection von F auf dieselbe Ebene gleich ist.* Man kann diese Fläche F die aus den Flächen G, H, ... zusammengesetzte Fläche nennen, da sie in Bezug auf G, H, ... dieselbe Eigenschaft hat, wie in Bezug auf die Linien g, h, ... die aus ihnen zusammengesetzte f.

Werden nun — um diese Betrachtung auf die Bestimmung der Momente anzuwenden — durch A^0A^1, B^0B^1, ... die zu einer gewissen Zeit statt habenden Geschwindigkeiten der Körper A, B, ... im Raume dargestellt, so hat man nur die Flächen OA^0A^1, OB^0B^1, ..., nachdem sie vorher resp. mit Zahlen a, b, ... multiplicirt worden, welche den Massen von A, B, ... proportional sind, zu einer einzigen Fläche F zusammenzusetzen. Die Summe der Projectionen von $a \,.\, OA^0A^1$, $b \,.\, OB^0B^1$, ... auf irgend eine durch O gelegte Ebene Γ, oder das Moment des Systems in Bezug auf diese Ebene, wird dann stets der Projection von F auf dieselbe Ebene gleich sein, also $= F \cos \Gamma \wedge F$.

Unter allen auf denselben Punkt O bezogenen Momenten ist daher dasjenige, dessen Ebene mit F zusammenfällt, am grössten, nämlich $= F$ selbst, weshalb wir F das Hauptmoment für den Punkt O nennen wollen. Für jede Ebene, welche auf F perpendikular steht, und wo daher $\Gamma \wedge F = 90^0$, ist das Moment null. Eben so leuchtet ein, dass für alle Ebenen, welche mit F gleiche Winkel machen, die Momente gleiche Werthe haben.

Nachträglich ist noch zu zeigen, wie bei der Zusammensetzung der Flächen der nöthigen Rücksicht auf die Zeichen

noch Genüge geschehen muss, was im Vorigen, um die Auffassung der Hauptsache desto leichter zu machen, übergangen wurde. — Seien OQ, OR, ... den Flächen $a \,.\, OA^0A^1$, $b \,.\, OB^0B^1$, ... proportionale und auf ihnen perpendikulare (vorhin mit g, h, ... bezeichnete) Linien, und zwar jede derselben auf derjenigen Seite ihrer Fläche stehend, bei welcher, wenn die Richtung von den Füssen nach dem Kopfe nach und nach in die Lagen OQ, OR, ... gebracht wird, die darauf resp. perpendikularen Linien A^0A^1, B^0B^1, ... jedesmal nach derselben Seite, es sei von der Rechten nach der Linken, gerichtet erscheinen. Ist nun OP (vorhin f) die aus OQ, OR, ... zusammengesetzte Linie, so lege man durch O eine auf ihr perpendikulare Ebene und ziehe darin eine Linie K^0K^1 so, dass, den Kopf nach P und die Füsse nach O gebracht, ihre Richtung nach links gehend erscheint, und von solcher Länge, dass das Dreieck $OK^0K^1 : a \,.\, OA^0A^1$: etc. $= OP : OQ$: etc. Dieses Dreieck wird die gesuchte Fläche F sein; es wird nämlich, wenn A_0A_1, B_0B_1, ... und K_0K_1 die Projectionen von A^0A^1, B^0B^1, ... auf irgend eine durch O gelegte Ebene Γ sind, mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen (§. 37. Anmerkung)

$$a \,.\, OA_0A_1 + b \,.\, OB_0B_1 + \ldots = OK_0K_1 \text{ sein.}$$

§. 88.

Seien Γ und Γ' zwei einander parallele Ebenen, O ein Punkt in der erstern, O' in der letztern, und die Linie OO' auf ihnen perpendikular. Die zwei Momente des Systems, wenn dieses das einemal auf Γ und O, das anderemal auf Γ' und O' bezogen wird, sind dann einander gleich, weil unter der gemachten Voraussetzung von jeder Linie des Systems, wie von A^0A^1, die zwei Projectionen auf Γ und Γ' offenbar einander gleich und parallel sind und resp. gegen O und O' einerlei Lage haben.

Bei ruhendem Schwerpunkte, wo (§. 86. Folgerung) das Moment für eine Ebene Γ unabhängig von dem Orte des Punktes O in derselben ist und mithin allein schon durch Γ bestimmt wird, — bei einem solchen System sind folglich

die Momente für je zwei parallele Ebenen einander gleich, und wenn das Moment für eine gewisse Ebene seinen grössten Werth hat, so hat es denselben auch für jede andere ihr parallele Ebene. Die aus den Flächen $a . OA''A'$, etc. zusammengesetzte Fläche F wird daher, wenn der Schwerpunkt ruht, immer von derselben Grösse und Lage gefunden, wo auch im Raume der Punkt O angenommen werden mag, und — setzen wir nach §. 85. hinzu — welches auch der Zeitpunkt sein mag, auf welchen sich die zur Bestimmung von F angewendeten Geschwindigkeiten beziehen. Die Ebene von F, oder vielmehr die Reihe von Parallelebenen, in deren jeder F liegen kann, wird deshalb **die unveränderliche Ebene des Systems** genannt.

§. 89.

Ruht der Schwerpunkt nicht und bewegt er sich daher geradlinig und gleichförmig, so ändert sich bei Annahme eines andern O im Allgemeinen auch die Lage und Grösse des darauf bezogenen Hauptmoments F. Indessen lässt sich auch in diesem Falle eine von O unabhängige unveränderliche Ebene leicht angeben. Denn da ein System mit fortrückendem Schwerpunkte in Bezug auf einen Raum, der nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit fortrückt, als ein System mit ruhendem Schwerpunkte angesehen werden kann, so wird von den Momenten eines Systems der erstern Art alles Das gelten, was so eben von den Momenten eines Systems der letztern Art gezeigt worden, dafern man nur jene Momente auf Ebenen bezieht, welche, sich parallel bleibend, so fortrücken, dass jeder ihrer Punkte dieselbe Bewegung wie der Schwerpunkt hat, oder, was dasselbe ist: wenn man statt der wahren Bewegungen der Körper ihre relativen in Bezug auf den Schwerpunkt in Rechnung nimmt.

Bei einem System von nur zwei Körpern ist hiernach die durch den Schwerpunkt gelegte und von ihm parallel fortgeführte Ebene, in welcher sich die zwei Körper selbst bewegen (§. 81.), als die unveränderliche Ebene zu betrachten.

Da bei unserem Sonnensystem von Einwirkungen fremder Sonnen auf dasselbe, bis jetzt wenigstens, keine Spur sich gezeigt hat, so muss sich auch bei ihm eine unveränderliche Ebene nachweisen lassen, also eine Ebene, die sich immerfort parallel bleibt, während die Ebenen, in denen sich die Planeten und Kometen um die Sonne und die Monde um ihre Planeten bewegen, zu Folge der gegenseitigen Störungen aller dieser Körper, stets, wenn auch nur sehr langsam, ihre Lage ändern. Da man die Lage dieser Ebene zu jeder Zeit leicht wieder finden kann, so eignet sie sich ganz besonders zu einer Grundebene, auf welche man die Bahnebenen jener Körper bezieht und die allmähligen Aenderungen derselben bestimmt.

In Bezug auf die Lage, welche die Ekliptik zu Anfange des Jahres 1750 hatte, ist die vom damaligen Frühlingsäquinoctium an gerechnete Länge des aufsteigenden Knoten der unveränderlichen Ebene $= 102^0\, 57'\, 30''$ und die Neigung derselben $= 1^0\, 35'\, 31''$. (Laplace Mécanique céleste, tome III., pag. 163.)

§. 90.

Um von unserem Sonnensystem und überhaupt von einem System sich anziehender Körper, deren Schwerpunkt fortrückt, die unveränderliche Ebene zu finden, hätte man nach dem Obigen vor Allem die Bewegung des Schwerpunkts zu bestimmen, indem auf diesen die Bewegungen der Körper bezogen werden müssen. Es lässt sich aber dem Ausdrucke für das Moment noch eine andere Form geben, bei welcher wir der Bestimmung des Schwerpunktes ganz überhoben sind.

Bedeuten wiederum A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, ... die auf die Ebene selbst, für welche das Moment gesucht wird, projicirten Geschwindigkeiten der Massen a, b, c, ... zu einer gewissen Zeit, so ist das Moment für den Punkt O der Ebene:

$$M = a \,.\, OA_0A_1 + b \,.\, OB_0B_1 + c \,.\, OC_0C_1 + \dots.$$

Setzen wir nun zuerst, dass der Schwerpunkt des Systems ruht, so ist M unabhängig von O, und daher auch,

wenn wir O nach und nach mit A_0, B_0, C_0, ... zusammenfallen lassen:

$$M = b \, . \, A_0 B_0 B_1 + c \, . \, A_0 C_0 C_1 + \ldots,$$
$$M = a \, . \, B_0 A_0 A_1 + c \, . \, B_0 C_0 C_1 + \ldots,$$
$$M = a \, . \, C_0 A_0 A_1 + b \, . \, C_0 B_0 B_1 + \ldots,$$

u. s. w., weil die Dreiecke $A_0 A_0 A_1$, $B_0 B_0 B_1$, ... null sind. Man multiplicire diese Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c, ... und addire sie hierauf, so kommt:

$$(a + b + c + \ldots) M = ab \, (A_0 B_0 B_1 + B_0 A_0 A_1)$$
$$+ ac \, (A_0 C_0 C_1 + C_0 A_0 A_1) + bc \, (B_0 C_0 C_1 + C_0 B_0 B_1) + \ldots$$

Es ist aber, wenn man $A_0 Q \equiv A_1 B_1$ (Fig. 33.) macht, $A_0 A_1 B_1 Q$ ein Parallelogramm, und daher (§. 37. Anmerk.)

$B_0 A_0 B_1 = B_0 A_0 Q + B_0 A_0 A_1$, oder was dasselbe ist:
$A_0 B_0 Q = A_0 B_0 B_1 + B_0 A_0 A_1$

$=$ der in der voranstehenden Gleichung mit ab multiplicirten Fläche. Weil nach dieser Construction $B_0 Q$ die auf die Ebene projicirte Geschwindigkeit von B ist, wenn A ruhend und die Bewegung von B gegen A unverändert angenommen wird (vergl. §. 81.), so ist diese Fläche $A_0 B_0 Q$ die unter denselben Bedingungen statt habende auf die Ebene projicirte Flächengeschwindigkeit des Radius AB. Aehnliches gilt von den übrigen Gliedern auf der rechten Seite der Gleichung, und wir erhalten somit für den Fall, wenn der Schwerpunkt ruht, zur Berechnung des Moments des Systems in Bezug auf eine gegebene Ebene die nachstehende Regel:

Man verbinde je zwei Körper des Systems durch einen Radius, bestimme die Flächengeschwindigkeit desselben, indem man bei unveränderter relativer Bewegung der beiden Körper den einen ruhend annimmt, und multiplicire diese Flächengeschwindigkeit mit dem Producte aus den Massen der beiden Körper. Die Summe der Projectionen dieser multiplicirten Flächen auf die gegebene Ebene, dividirt durch die Summe aller Massen, giebt das gesuchte Moment.

Die aus den multiplicirten Flächen zusammengesetzte Fläche aber (§. 88.) wird, nachdem sie noch durch die Summe der Massen dividirt worden, das Hauptmoment,

und die Ebene, in welcher sie liegt, die unveränderliche Ebene des Systems sein.

Bewegt sich der Schwerpunkt, so gelten dieselben Vorschriften unter der Voraussetzung, dass die Ebene, auf welche projicirt wird, und so auch die Ebene des Hauptmoments, sich parallel bleibend, mit dem Schwerpunkte fortrückt, und man erhält folglich das in §. 89. Gesuchte — aus dem Grunde, weil bei diesen Vorschriften bloss die relativen Bewegungen der Körper in Rechnung kommen, und die absolute Bewegung des Schwerpunktes ausser allem Betracht bleibt.

III. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

§. 91.

Unter der lebendigen Kraft eines sich bewegenden Körpers versteht man das Product seiner Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit. Bei einem System von Körpern, auf welche keine andern Kräfte als ihre gegenseitige Anziehung wirken, und wo diese Anziehung je zweier Körper eine Function ihrer gegenseitigen Entfernung ist, besteht nun das in der Ueberschrift genannte Princip darin, dass sich immer eine gewisse von den Massen und den gegenseitigen Entfernungen der Körper abhängige Function angeben lässt, von welcher die Summe aller lebendigen Kräfte des Systems, oder kurz: die lebendige Kraft des Systems selbst, stets um dieselbe Grösse verschieden ist; das also, wenn man die Massen der Körper und ihre gegenseitige Lage in irgend zwei Zeitpunkten kennt, man damit ohne Weiteres den Unterschied der Werthe der lebendigen Kraft des Systems in dem einen und dem andern Zeitpunkte zu bestimmen im Stande ist.

Da von diesem Princip in der Folge kein Gebrauch gemacht werden wird, obschon es bei tiefer in die Mechanik des Himmels eingehenden Untersuchungen grossen Nutzen zu leisten vermag, so will ich es hier bloss für ein System zweier nach dem Newton'schen Gesetze sich an-

ziehender Körper A und B, deren Massen a und b sind, beweisen.

Seien $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ die Wege von A und B während des Zeitelements $T_0 T_1$. Nun ist $A_0 B_0$ = der Summe der Projectionen von $A_0 A_1$, $A_1 B_1$ und $B_1 B_0$ auf $A_0 B_0$. Setzt man daher $\cos B_0 A_0 A_1 = P$, $\cos A_0 B_0 B_1 = Q$, und bemerkt, dass der Cosinus des Winkels von $A_1 B_1$ mit $A_0 B_0$, wegen der unendlichen Kleinheit des letztern, $= 1$ ist, so hat man:

$$A_0 B_0 = P \,.\, A_0 A_1 + A_1 B_1 + Q \,.\, B_0 B_1.$$

Man setze noch $A_0 B_0 = r$, die Geschwindigkeiten von A und B zur Zeit T_0, $= v$ und w, und $m \,.\, T_0 T_1 = 1$ (§. 10.), so ist $m \,.\, A_0 A_1 = v$, $m \,.\, B_0 B_1 = w$ und $m\,(A_1 B_1 - A_0 A_0)$ = der Geschwindigkeit r', mit welcher r seine Länge ändert. Die vorige Gleichung wird damit

$$(1) \quad Pv + Qw = -r'.$$

Die Kraft, mit welcher a von b angezogen wird, ist $= Kb : rr$; folglich die nach $A_0 B_0$ gerichtete Tangentialkraft $= PKb : rr$. Letztere ist aber auch der Kraft bei einer geradlinigen Bewegung gleich, deren Geschwindigkeit sich nach demselben Gesetze, wie bei der krummlinigen ändert (§. 23. *c.*), also $= v'$ (§. 21.), folglich

$$(2) \quad \frac{PKb}{rr} = v', \text{ und eben so } (3) \quad \frac{QKa}{rr} = w'$$

= der auf B wirkenden Tangentialkraft.

Man multiplicire (2) mit av, (3) mit bw, und addire hierauf diese Gleichungen, so kommt in Verbindung mit (1):

$$avv' + bww' + Kab\frac{r'}{rr} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber die Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}avv + \frac{1}{2}bww - K\frac{ab}{r}$ (§. 11.), und diese Geschwindigkeit, in Folge derselben Gleichung, $= 0$; mithin

$$(4) \quad avv + bww - 2K\frac{ab}{r} = \text{einer unveränderlichen Grösse};$$

d. h. die lebendige Kraft des Systems ist von der Function $2Kab : r$ stets um dieselbe Grösse verschieden.

Zusätze. *a.* Ruht der Schwerpunkt des Systems, so haben v und w entgegengesetzte Richtungen, und es ist $av = bw$ (§. 77.); die Geschwindigkeit des einen Körpers gegen den andern ist aber $= v + w$, welche u heisse. Es folgt hieraus

$$v = \frac{b}{a+b}u \text{ und } w = \frac{a}{a+b}u, \text{ womit (4) in}$$

$$uu - 2K\frac{a+b}{r} = \text{einer constanten Grösse,}$$

übergeht. Da in dieser Gleichung keine die absoluten Bewegungen der beiden Körper betreffenden Grössen vorkommen, so muss sie auch für den Fall gelten, wenn der Schwerpunkt sich bewegt. Sie ist übrigens mit der schon in §. 52. gefundenen Gleichung (11) identisch, indem das dortige $k^2 = a^3n^2$ (§. 44.) $= K(M + m)$ (§. 65.) ist. Die constante Grösse in der hier erhaltenen Gleichung ist nach §. 52., $= -K(a + b)$, dividirt durch die halbe grosse Axe des Kegelschnitts, welchen der eine Körper um den andern beschreibt.

b. Durch Betrachtungen, die ganz auf denselben Gründen, wie die vorigen, beruhen, findet man die lebendige Kraft eines Systems von drei oder mehrern nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehenden Körpern A, B, C, ... deren Massen $= a, b, c, \ldots$ sind,

$$= 2K\left(\frac{a \cdot b}{AB} + \frac{a \cdot c}{AC} + \frac{b \cdot c}{BC} + \ldots\right) + \text{einer const. Grösse.}$$

c. Von einem beliebigen Punkte O ausgehend, mache man OA, OB, OC, ... $\equiv$ den Geschwindigkeiten von A, B, C, ... und OS $\equiv$ der Geschwindigkeit des Schwerpunktes S von A, B, C, ..., so ist (§. 79.) $(a + b + c + \ldots)$ OS aus a . OA, b . OB, c . OC, ... zusammengesetzt, also (§. 74.)

$$(a + b + \ldots)\,\mathrm{OS} \equiv a \cdot \mathrm{OA} + b \cdot \mathrm{OB} + \ldots$$
$$\equiv a\,(\mathrm{OS} + \mathrm{SA}) + b\,(\mathrm{OS} + \mathrm{SB}) + \ldots$$
$$\text{folglich } 0 \equiv a \cdot \mathrm{SA} + b \cdot \mathrm{SB} + \ldots;$$

d. h. S ist der Schwerpunkt der in A, B, C, ... befindlichen Massen a, b, c, ... (§. 78. Zusatz).

Nach einem bekannten Satze in der Lehre vom Schwerpunkte ist aber, wo auch der Punkt O angenommen werden mag:

$$(\alpha) \quad a\,.\,OA^2 + b\,.\,OB^2 + \dots$$
$$= (a + b + ..)\,OS^2 + a\,.\,SA^2 + b\,.\,SB^2 + \dots$$

Lässt man hierin O nach und nach mit A, B, ... zusammenfallen, multiplicirt die dadurch entstehenden Gleichungen resp. mit a, b, ..., addirt sie alsdann, dividirt mit 2 und setzt

$$(\beta) \quad \frac{ab\,.\,AB^2 + ac\,.\,AC^2 + bc\,.\,BC^2 + \dots}{a + b + c + \dots} = L,$$

so kommt:

$$L = a\,.\,SA^2 + b\,.\,SB^2 + c\,.\,SC^2 + \dots,$$

und hieraus in Verbindung mit (α):

$$a\,.\,OA^2 + b\,.\,OB^2 + \dots = (a + b + \dots)\,OS^2 + L.$$

Der gemachten Construction gemäss ist nun die linke Seite dieser Gleichung = der lebendigen Kraft des Systems der Körper A, B, C, ...; die auf der rechten Seite in L, zu Folge von (β), enthaltenen Linien AB, AC, BC, ... drücken aber die relativen Geschwindigkeiten von B gegen A, von C gegen A, von C gegen B, etc. aus, und man sieht somit, wie die lebendige Kraft eines Systems durch die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes (OS) und durch die Geschwindigkeiten, welche die Körper des Systems gegen einander haben, dargestellt werden kann.

Bei einem System nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehender Körper ist hiernach

$$\frac{ab\,.\,AB^2 + ac\,.\,AC^2 + bc\,.\,BC^2 + \dots}{a + b + c} = 2K\left(\frac{ab}{AB} + \frac{ac}{AC} + \frac{bc}{BC} + \dots\right)$$
$$+ \text{ einer constanten Grösse,}$$

indem wegen der gegenseitigen Anziehung die Linie OS constant ist, und folglich das Glied $(a + b + \dots)\,OS^2$ mit der zu Ende gesetzten constanten Grösse zusammenfliesst.

Dritter Abschnitt.

Von den Störungen des Mondes durch die Sonne.

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Das Problem der drei Körper.

§. 92.

Das Hauptgeschäft der auf den Himmel angewendeten Mechanik besteht darin, die kleinen Abweichungen oder Störungen zu bestimmen, welche in dem ohne dieses elliptischen Laufe der Planeten um die Sonne und der Trabanten um ihre Hauptplaneten dadurch entstehen müssen, dass jeder dieser Körper nicht bloss von demjenigen, um welchen er sich bewegt, sondern immer zugleich von allen übrigen Körpern angezogen wird. Eine vollständige Lösung dieser verwickelten Aufgabe ist bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis schlechthin unmöglich. Indessen hat man zum praktischen Bedarf vollkommen hinreichende Methoden gefunden, welche die Aufgabe durch Näherung lösen. Die Möglichkeit einer solchen Näherung ist hauptsächlich darin begründet, dass die Kräfte, durch welche die rein elliptische Bewegung eines Planeten um die Sonne oder eines Trabanten um seinen Planeten gestört wird, theils wegen der Kleinheit der Massen der störenden Körper gegen die Masse der Sonne oder des Hauptplaneten, theils wegen der sehr grossen Entfernung jener Körper, immer nur sehr gering gegen die Kräfte sind, welche die elliptischen Bewegungen selbst erzeugen. Auch wird die genäherte Lösung der Aufgabe dadurch noch besonders begünstigt, dass die Bahnen, in denen sich die Planeten und ihre Trabanten bewegen, von der Kreisform nur wenig abweichen, und dass die Ebenen dieser Bahnen nur kleine Winkel mit einander machen.

§. 93.

Bei jeder die Störungen betreffenden Aufgabe kommen demnach gleichzeitig zum wenigsten drei Körper in Betracht: ein Hauptkörper S, ein ihn umkreisender Körper P und ein diese Bewegung störender Körper P'.

Sind bloss zwei Körper, S und P, vorhanden, welche sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, so beschreibt P um S einen Kegelschnitt, dessen einen Brennpunkt S einnimmt, und der Radius Vector SP überstreicht den Zeiten proportionale Flächen. Durch das Hinzukommen des dritten Körpers P', welcher die zwei erstern nach demselben Gesetz anzieht, wird aber die Bewegung von P um S gestört, so dass die Bahn von P um S nicht mehr ein vollkommener Kegelschnitt ist, und auch die vom Radius SP beschriebene Fläche nicht mehr genau der Zeit proportional zunimmt. Die Aufgabe, welche diese nur von einem Körper hervorgebrachten Störungen zu entwickeln verlangt, heisst **das Problem der drei Körper**. Aber auch hiervon ist die Auflösung noch mit solchen Schwierigkeiten verknüpft, dass man sich dabei nur mit Näherungsmethoden begnügen muss.

§. 94.

Den Anfang der hierzu nöthigen Untersuchungen macht eine nähere Bestimmung der dabei thätigen Kräfte. Man setze die Massen der Körper S, P, P', $= M$, m, m'; seien ferner die Entfernungen $SP = r$, $SP' = r'$, $PP' = \varrho$, wobei S, P, P' nur die Mittelpunkte der dadurch ausgedrückten Körper bedeuten; endlich sei K die Kraft, mit welcher ein Körper, dessen Masse $= 1$, einen andern in einer Entfernung $= 1$ von ihm befindlichen Körper anzieht. Alsdann wirken nach dem Gesetze der allgemeinen Schwere und nach dem Satze von sich anziehenden Kugeln (§. 71. c.)

$$\text{auf } S \text{ die Kräfte } \frac{Km}{r^2} \text{ und } \frac{Km'}{r'^2} \text{ nach } SP \text{ und } SP',$$

$$\text{auf } P \text{ die Kräfte } \frac{KM}{r^2} \text{ und } \frac{Km'}{\varrho^2} \text{ nach } PS \text{ und } PP',$$

$$\text{auf } P' \text{ die Kräfte } \frac{KM}{r'^2} \text{ und } \frac{Km}{\varrho^2} \text{ nach } P'S \text{ und } P'P.$$

Da es sich aber nicht um die absoluten Bewegungen von S, P und P', sondern nur um die relativen, und zwar von P und P' um S, handelt, so wollen wir uns den Körper S ruhend vorstellen und demgemäss die auf ihn wirkenden Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf P und P' übertragen (§. 24. *a.*). Auf P wirken alsdann ausser den zwei nach PS und PP' gerichteten Kräften $KM : r^2$ und $Km' : \varrho^2$ noch die zwei Kräfte $Km : r^2$ und $Km' : r'^2$ nach PS und nach einer mit $P'S$ parallelen Richtung, d. i. die drei Kräfte

$\frac{K(M+m)}{r^2}$, $\frac{Km'}{\varrho^2}$ und $\frac{Km'}{r'^2}$ nach PS, PP' und parallel mit $P'S$,

und eben so auf P' die drei Kräfte

$\frac{K(M+m')}{r'^2}$, $\frac{Km}{\varrho^2}$ und $\frac{Km}{r^2}$ nach $P'S$, $P'P$ und parallel mit PS.

Unsere Aufgabe ist hiermit darauf zurückgebracht, die von den drei auf P wirkenden Kräften erzeugte Bewegung dieses Körpers um den als ruhend zu betrachtenden Körper S zu bestimmen.

Offenbar wird hierzu die Bewegung von P' als bekannt vorausgesetzt, zu deren Bestimmung aber aus gleichem Grunde die Kenntniss der Bewegung von P erforderlich ist. Da aber die Wirkungen von P' auf P oder die Störungen, welche P' in dem Laufe von P hervorbringt, verhältnissmässig nur schwach sind, so hat man die Bewegung von P' nicht mit der äussersten Schärfe zu wissen nöthig. Insbesondere können daher die von P in der Bewegung von P' erzeugten Störungen, wenigstens bei einer ersten Annäherung, fast immer aber gänzlich, ohne Furcht eines für die Beobachtungen merkbaren Fehlers, vernachlässigt werden. Man kann folglich die Bewegung von P', als allein durch die Kraft $K(M+m') : r'^2$ bewirkt, d. i. als eine rein elliptische um S ansehen.

§. 95.

Es kommt nunmehr darauf an, aus den drei vorhin gefundenen auf P wirkenden Kräften die Bewegung von P, oder vielmehr die Störungen zu bestimmen, welche die zweite

und dritte dieser Kräfte in der von der ersten ungleich stärkern Kraft erzeugten elliptischen Bewegung von P hervorbringen. Die Mittel hierzu liegen in den in §§. 34., 36. und 38. erhaltenen allgemeinen Relationen zwischen Bewegungen und den sie bewirkenden Kräften. Zu dem Ende haben wir zuerst die gedachten drei Kräfte in drei andere T, V, W umzuwandeln, von denen T in der Richtung des Radius Vector SP, V normal auf dem Radius in der Ebene, in welcher sich P um S bewegt, und W normal auf dieser Ebene wirkt. Die erste dieser Kräfte, T, ist positiv, wenn sie P von S zu entfernen sucht; die zweite V ist es, wenn sie in der Ebene nach derselben Seite von PS hin gerichtet ist, nach welcher sich P bewegt; die dritte W sei es, wenn sie P über die nördliche Seite der Ebene zu erheben strebt.

Von den oben erhaltenen drei Kräften $K(M+m):r^2$, etc. ist hiernach die erste ein Theil von T. Man fälle ferner von P' auf die Ebene der Bewegung ein Perpendikel $P'Q$ (Fig. 34.) und von Q auf SP ein Perpendikel QR, so zerlegt sich die zweite nach PP' gerichtete Kraft $Km':\varrho^2$ in drei nach PR, RQ, QP' gerichtete und daher resp. zu T, V, W gehörige Kräfte

$$\frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{PR}{\varrho},\quad \frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{RQ}{\varrho},\quad \frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{QP'}{\varrho}.$$

Eben so zerfällt die dritte nach $P'S$ gerichtete Kraft $Km':r'^2$, oder die nach SP' gerichtete Kraft $-Km':r'^2$, in die drei Kräfte

$$-\frac{Km'}{r'^2}\cdot\frac{SR}{r'},\quad -\frac{Km'}{r'^2}\cdot\frac{RQ}{r'},\quad -\frac{Km'}{r'^2}\cdot\frac{QP'}{r'},$$

welche die Richtungen SR, RQ, QP' haben und mithin gleichfalls Theile von T, V, W sind. Es ist demnach vollständig:

$$T=-\frac{K(M+m)}{r^2}+\frac{Km'}{\varrho^3}\,.\,PR-\frac{Km'}{r'^3}\,.\,SR,$$

$$V=\frac{Km'}{\varrho^3}\,.\,RQ-\frac{Km'}{r'^3}\,.\,RQ,$$

$$W=\frac{Km'}{\varrho^3}\,.\,QP'-\frac{Km'}{r'^3}\,.\,QP'.$$

Sei nun in der Ebene der Bewegung von P, SO die Linie, von welcher an die Längen gerechnet werden (§. 45.).

Man setze die Winkel OSP, OSQ, als die Längen von P, P', resp. $= l$, l', also $PSQ = l' - l$, und noch den Winkel QSP', als die Breite von P', $= b'$. Hiermit wird

$$QP' = r' \sin b',\ SQ = r' \cos b',$$
$$RQ = SQ \sin (l' - l) = - r' \cos b' \sin (l - l'),$$
$$SR = SQ \cos (l' - l) = r' \cos b' \cos (l - l'),$$
$$PR = r' \cos b' \cos (l - l') - r,$$

und die Werthe von T, V, W gehen damit über in

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \cos (l - l') - \frac{Km'}{\varrho^3} r,$$

$$V = - Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \sin (l - l'),$$

$$W = Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin b'.$$

Wie man sieht, ist es das erste Glied der Kraft T, welches die rein elliptische Bewegung erzeugt, während durch die zwei übrigen Glieder von T, so wie durch die Kräfte V und W, weil sie insgesammt m' zum Factor haben, die Störungen hervorgebracht werden, und zwar durch T und V in Verbindung die Störungen des Radius Vector und der Länge, durch W aber die Störungen der Breite.

§. 96.

Da durch r und l der Ort von P und durch r', l', b' der Ort von P' bestimmt ist, so wird durch diese Grössen auch der gegenseitige Abstand von P und P' bestimmt sein. In der That hat man

$$\varrho^2 = PQ^2 + QP'^2 = PR^2 + RQ^2 + QP'^2,$$

und wenn man für PR, RQ, QP' ihre vorhin bemerkten Werthe setzt, nach gehöriger Reduction:

$$\varrho = \sqrt{[r^2 - 2rr' \cos b' \cos (l - l') + r'^2]}.$$

Dieser Ausdruck für ϱ ist demnach in den Formeln für T, V, W noch zu substituiren, ehe man mit ihnen weitere Rechnungen anstellt.

Werde hier noch bemerkt, dass der in T, V, W und ϱ vorkommende Cosinus von b' in dem Folgenden stets $= 1$ gesetzt werden wird. Wegen der Kleinheit der gegenseitigen

Neigungen der Bahnen werden wir nämlich bei Berechnung der Störungen bloss die ersten Potenzen der Neigungen berücksichtigen. Es ist aber der grösstmögliche Werth von b' = der Neigung ι der Bahn von P' gegen die Bahn von P, also auch der grösstmögliche Werth von $1 - \cos b'$, $= 1 - \cos \iota = 2 \sin \frac{1}{2}\iota^2 < \frac{1}{2}\iota^2$; folglich u. s. w.

Indem man aber das Quadrat der Neigung vernachlässigt und damit $\cos b' = 1$ setzt, werden T und V von der Neigung offenbar ganz unabhängig; mithin auch die durch T und V bewirkten Störungen des Radius Vector und der Länge; d. h. bei Berechnung dieser Störungen kann man ohne merklichen Fehler die schon an sich wenig gegen einander geneigten Bahnebenen des störenden und des gestörten Körpers als zusammenfallend betrachten.

Anders verhält es sich mit den durch W erzeugten Störungen der Breite. Denn weil W den Factor $\sin b'$ enthält, so sind diese schon von der ersten Potenz der Neigung abhängig.

§. 97.

Die Ausdrücke für T, V und W, wie sie nach der Substitution des Werthes für ϱ hervorgehen, lassen sich in dieser Gestalt zur Bestimmung der Störungen noch nicht unmittelbar anwenden, sondern müssen deshalb noch auf zweckdienliche Weise umgeformt werden. Diese Umformung ist aber eines der mühevollsten Geschäfte bei der ganzen Störungsrechnung, selbst wenn man mit einer ersten Annäherung sich begnügen will. Nur die Berechnung der Störungen, welche der Mond bei seiner Bewegung um die Erde von der Sonne erleidet, hat jener mühevollen Entwickelung nicht nöthig, sobald man nämlich bei einer ersten Näherung stehen bleibt. Denn im Gegentheil erfordert die Berechnung der Mondsstörungen, wenn sie mit einer den Beobachtungen genügenden Genauigkeit verlangt werden, ungleich mehr Arbeit und Umsicht, als irgend eine andere Störungsrechnung.

Wegen dieser Leichtigkeit der Entwickelung von T, V und W bei der Mondstheorie, wenn man bloss die ersten Glieder beibehält, und weil die hiermit sich ergebenden

Mondsstörungen so beträchtlich sind, dass sie schon von den älteren Astronomen wahrgenommen wurden, und daher noch ein historisches Interesse haben; aus diesen Gründen wollen wir auch gegenwärtig, um uns von den Störungsrechnungen zuerst einen übersichtlichen Begriff zu verschaffen, mit der Mondstheorie den Anfang machen.

Zweites Kapitel.

Von den Kräften, durch welche die Bewegung des Mondes um die Erde gestört wird.

§. 98.

Bei den Störungen, welche die Sonne im Laufe des Mondes um die Erde hervorbringt*), tritt der eigenthümliche Fall ein, dass die Masse der Sonne, als des störenden Körpers, mehr als 300000 mal grösser ist als die Masse der Erde (§. 66.), welche die Stelle des Hauptkörpers einnimmt, während bei den Planetenstörungen die Masse der Sonne, als des Hauptkörpers, die Masse des störenden Planeten bei weitem überwiegt. Weil aber die Sonne gegen 400 mal weiter, als der Mond, von der Erde entfernt ist und sie folglich auf Erde und Mond nahe mit gleicher Kraft wirkt, so sieht man schon im Voraus, dass die zu entwickelnden Störungen, als welche nur in dem Unterschiede jener Wirkungen bestehen, der Grösse der störenden Masse ungeachtet, doch nicht allzu bedeutend sein können. Die nachfolgende Rechnung wird dieses bestätigen.

*) Die Störungen, welche der Mond von den Planeten erleidet, sind höchst unbedeutend. Nach Damoiseau's Mondstafeln kann die Störung der Länge des Mondes durch Venus, als denjenigen Planet, welcher ihm am nächsten kommen kann, nur bis auf 1″,3, und die Störung durch Jupiter, als den massenreichsten Planet, nur bis auf 0″,8 steigen.

§. 99.

Zu diesem Ende haben wir zunächst die im Vorigen für das Problem der drei Körper hergeleiteten allgemeinen Formeln dem gegenwärtigen Falle anzupassen. Sie gründeten sich auf die Voraussetzung, dass die absolute Bewegung des Hauptkörpers nach entgegengesetzter Richtung auf die beiden andern übergetragen ist, und wir haben uns daher im Folgenden die Erde, als den jetzigen Hauptkörper, als ruhend, und — ganz dem sinnlichen Scheine gemäss — den Mond und die Sonne in den Zeiträumen eines Monats und eines Jahres in nahe kreisförmigen und nahe in derselben Ebene liegenden Bahnen sich um die Erde bewegend zu denken.

Weil die vorhin mit S, P und P' bezeichneten Körper jetzt die Erde, der Mond und die Sonne sind, so bedeuten nunmehr in jenen Formeln

M, m, m' die Massen von Erde, Mond und Sonne,

r, r' die Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde,

ϱ die Entfernung der Sonne vom Monde,

l, l' die in der Mondsbahn gerechneten Längen von Mond und Sonne,

b' die Breite der Sonne in Bezug auf die Mondsbahn,

T, V, W die auf den Mond wirkenden rechtwinklig coordinirten Kräfte, von denen T, V in der Ebene der Mondsbahn selbst, T nach der Richtung des Radius Vector des Mondes, wirken.

Der Umstand, durch welchen die weitere Entwickelung jener Formeln bei der Mondstheorie vorzugsweise begünstigt wird, ist die Kleinheit des Verhältnisses $r : r'$. Denn da dieses nahe nur $1 : 400$ ist, so können von ihm die zweiten und höhern Potenzen, vor der Hand wenigstens, ganz vernachlässigt werden. Hiernach, und wenn wir $\cos b'$ immer $= 1$ setzen (§. 96.), ergiebt sich

$$\varrho = r' \sqrt{\left[1 - 2\frac{r}{r'}\cos(l - l') + \frac{r^2}{r'^2}\right]}$$

$$= r' \sqrt{\left[1 - 2\frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]} = r'\left[1 - \frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]^{*)},$$

folglich

$$\varrho^{-3} = r'^{-3}\left[1 + 3\frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]$$

und

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{r}{r'^4}\cos(l - l').$$

Die Substitution hiervon in den Ausdrücken für T, V, W (§. 95.) giebt:

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + 3\frac{Km'r}{r'^3}\cos(l - l')^2 - \frac{Km'r}{r'^3}$$

$$- 3\frac{Km'r}{r'^3}\cdot\frac{r}{r'}\cos(l - l'),$$

$$V = -3\frac{Km'r}{r'^3}\cos(l - l')\sin(l - l'),$$

$$W = 3\frac{Km'r}{r'^3}\cos(l - l')\sin b';$$

oder nach bekannten trigonometrischen Umformungen, und weil im Ausdrucke für T das 4te Glied gegen das 2te und 3te wegzulassen ist:

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{Km'r}{r'^3}\left[1 + 3\cos 2(l - l')\right],$$

$$V = -\tfrac{3}{2}\frac{Km'r}{r'^3}\sin 2(l - l').$$

Seien endlich n und n' die mittlern Bewegungen von Mond und Sonne, wie selbige durch Beobachtungen gefunden werden; a und a' die daraus nach der elliptischen Theorie folgenden mittlern Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde, so ist (§. 65.)

$$K(M + m) = n^2 a^3 \text{ und } K(m' + M) = n'^2 a'^3$$

---

*) $= r' - r\cos(l - l')$. Dieser Werth von ϱ kann, wie man leicht wahrnimmt, auch schon dadurch gefunden werden, dass man von P (Fig. 34.) auf SP' ein Perpendikel Pp fällt und wegen des sehr kleinen Winkels $SP'P$ an der Sonne die Linien pP' und PP' als gleich lang betrachtet.

$= Km'$ sehr nahe, weil M noch nicht der 300000ste Theil von m' ist (§. 66.); also, wenn wir noch

$$n'^2 = n^2 w \text{ setzen:}$$
$$Km' = n^2 a'^3 w.$$

Mit Einführung dieser Werthe von $K(M+m)$ und Km' in den Gleichungen für T, V, W, und nachdem man noch jede von ihnen mit $n^2 a$ dividirt und der Kürze willen die mit T, V, W proportionalen

$$\frac{T}{n^2 a} = T_1, \quad \frac{V}{n^2 a} = V_1, \quad \frac{W}{n^2 a} = W_1$$

gesetzt hat, findet sich:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{r}{a} \cdot \frac{a'^3}{r'^3} w\,[1 + 3\cos 2(l - l')],$$

$$V_1 = -\tfrac{3}{2}\frac{r}{a} \cdot \frac{a'^3}{r'^3} w \sin 2(l - l'),$$

$$W_1 = 3\frac{r}{a} \cdot \frac{a'^3}{r'^3} w \cos(l - l') \sin b'.$$

§. 100.

Die letzterhaltenen Ausdrücke geben eine sehr klare Uebersicht von dem gegenseitigen Verhalten der Kräfte und ihrer Theile. Es kommen nämlich darin, ausser den trigonometrischen Functionen, noch drei Zahlen $\frac{a}{r}$, $\frac{a'}{r'}$ und w vor. Von diesen sind die beiden ersten nur wenig von der Einheit verschieden; die letzte aber, mit welcher die störenden Kräfte multiplicirt sind, ist sehr klein. Denn es verhält sich $n : n' = 365{,}256 : 27{,}322$ (§. 66.) $= 13{,}36875 : 1 = 1 : 0{,}074801$, woraus

$$w = \frac{n'^2}{n^2} = \frac{1}{178{,}72} \text{ folgt.}$$

Der Unterschied der Zahlen $\frac{a}{r}$ nnd $\frac{a'}{r'}$ von der Einheit rührt hauptsächlich von den Excentricitäten e und e' der Monds- und Sonnenbahn her. Wir werden diese Excentricitäten (beiläufig $= \frac{1}{18}$ und $\frac{1}{60}$), so wie die gegenseitige Neigung der Bahnen ι ($= 5^0\,9' = \frac{1}{11}$ in Theilen des Halbmessers) und den Exponenten des Verhältnisses $n' : n$ ($= \frac{1}{13}$),

als kleine Zahlen der ersten Ordnung betrachten. Hiernach werden auch die Unterschiede zwischen irgend welchen Potenzen der Zahlen $\frac{a}{r}$ und $\frac{a'}{r'}$ und der Einheit zur ersten Ordnung, dagegen w zur zweiten Ordnung gehören. Alle von der Störung herrührenden Glieder werden mithin, weil sie w zum Factor haben, gleichfalls von der zweiten, oder einer höheren Ordnung sein.

Wegen der nöthigen Schranken unserer Untersuchung wollen wir aber — einige besondere Fälle ausnehmend — im Folgenden nur noch die Störungsglieder der dritten Ordnung berücksichtigen, also überhaupt nur diejenigen, welche entweder w allein, oder ew, $e'w$, ιw zum Factor haben, — nicht etwa die mit $\iota^2 w$ multiplicirten Glieder, was damit znsammenstimmt, dass im Vorigen $\cos b' = 1$ gesetzt wurde.

Insonderheit können deshalb in der Gleichung für W_1, weil $\sin b'$ mit ι von einerlei Ordnung ist (§. 96.), die Factoren $\frac{r}{a}$ und $\frac{a'^3}{r'^3}$ unbeachtet bleiben, wodurch diese Gleichung sich in

$$W_1 = 3w \cos (l - l') \sin b' \text{ zusammenzieht.}$$

§. 101.

Im Folgenden werden wir zunächst die Störungen des Radius Vector und der Länge, also die von den Kräften T und V herrührenden Störungen zu entwickeln suchen. Weil hierbei die kleine gegenseitige Neigung der Monds- und der Sonnenbahn nicht in Betracht kömmt (§. 96.), so werden wir uns bei diesen Rechnungen beide Körper, als in einer und derselben Ebene um die Erde sich bewegend, vorstellen. Ehe wir aber die Rechnungen beginnen, wird es gut sein, uns von der Art, wie die störenden Kräfte nach der verschiedenen Stellung des Mondes gegen die Sonne ihre Werthe ändern, einen übersichtlichen Begriff zu verschaffen.

Nehmen wir dabei die Kraft, mit welcher der Mond, ohne die Störung durch die Sonne, nach der Erde getrieben wird, zur Einheit, so sind, nach §. 99. und wegen der ge-

ringen Abweichung der Verhältnisse $a : r$ und $a' : r'$ von 1 : 1, die störenden Kräfte in der Richtung des Radius Vector und in der darauf perpendikularen Richtung nahe

$$= \tfrac{1}{2} w \, [1 + 3 \cos 2 \, (l - l')] \text{ und } - \tfrac{3}{2} w \sin 2 \, (l - l').$$

Die erstere dieser Kräfte besteht aus einem constanten und einem veränderlichen Theile. Der constante Theil, welcher zugleich den mittlern Werth dieser Kraft darstellt, ist $= \frac{1}{2} w = \frac{1}{357}$. Weil die im Radius wirkende Kraft als positiv angesehen wird, wenn sie den Mond von der Erde zu entfernen und daher seine Schwere gegen die Erde zu vermindern strebt, so schliessen wir hieraus, *dass die Schwere des Mondes gegen die Erde durch die Sonne durchschnittlich um ihren 357sten Theil vermindert wird.*

Der veränderliche Theil kann bis zum Dreifachen des constanten nach der einen und andern Seite anwachsen, wodurch das einemal eine Verminderung der Schwere, viermal so gross als die mittlere, entsteht, das anderemal aber eine Verstärkung der Schwere erzeugt wird, welche dem Doppelten der mittlern Verminderung gleich kommt. Ersteres ist der Fall, wenn $\cos 2 \, (l - l') = 1$, also für $l - l' = 0$ und $= 180^0$, d. h. im Neu- und im Vollmonde oder in den Syzygien; letzteres geschieht, wenn $\cos 2 \, (l - l') = -1$, also wenn $l - l' = 90^0$ und $= 270^0$, d. h. im ersten und im letzten Viertel oder in den Quadraturen. Der mittlere Werth hat statt für $\cos 2 \, (l - l') = 0$, also für $l - l' = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$, d. i. in den zwischen den Syzygien und den Quadraturen mitten inne liegenden Punkten oder in den Octanten.

Was ferner die auf dem Radius Vector perpendikulare Kraft $= - \frac{3}{2} w \sin 2 \, (l - l')$ anlangt, so ist sie in den Syzygien und Quadraturen null, weil daselbst $\sin 2 \, (l - l') = 0$ ist. Ihren grössten Werth $= \frac{3}{2} w = \frac{1}{119}$ erreicht sie in den Octanten, und dieser ist abwechselnd negativ und positiv, d. h. dem Sinne der Bewegung des Mondes entgegen gerichtet und mit ihm übereinstimmend (§. 95.), weil $- \sin 2 \, (l - l')$ für $l - l' = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$ resp. $= -1, +1, -1, +1$ wird. Die auf dem Radius perpendikulare Kraft strebt

hiernach den Mond derjenigen Syzygie, welcher er am nächsten ist, noch näher zu bringen, nämlich vom letzten bis zum ersten Viertel dem Neumondspunkte und vom ersten bis zum letzten Viertel dem Vollmondspunkte. Dieses Streben ist am grössten in den Octanten, wo es dem Dreifachen des mittleren Werthes der in der Richtung des Radius störenden Kraft gleich kommt.

Was wir jetzt über die beiden störenden Kräfte besonders bemerkt haben, lässt sich leicht in Einem Satze vereinigt darstellen. Wir haben deshalb nur die zwei Kräfte zu Einer zusammenzusetzen, von deren Richtung und Stärke Folgendes gelten wird: *Während jedes synodischen Umlaufs des Mondes um die Erde dreht sich auch die Richtung der störenden Kraft einmal um ihn herum, nur nach entgegengesetztem Sinne (von der Linken nach der Rechten), so dass sie in den Syzygien abwärts von der Erde, in den Quadraturen nach ihr zu gerichtet ist. Dabei hat sie in den Syzygien ihren grössten Werth* $= \frac{1}{2} w$, *in den Quadraturen ihren kleinsten* $= \frac{1}{4} w$; *in den Octanten ist sie nahe* $= \frac{3}{4} w$, *genauer* $= \frac{1}{4} \sqrt{10} \,.\, w$. Man sehe Fig. 35., worin N, V, E, L die Punkte des Neu- und Vollmondes und des ersten und letzten Viertels sind, und wo die Richtung und Stärke der störenden Kraft durch die Richtung und Länge kleiner Pfeile angedeutet ist.

§. 102.

Zusätze. *a.* Dass durch die Sonne die Schwere des Mondes gegen die Erde um ihren 357sten Theil geschwächt wird, ist eben so viel, als ob die Summe der Massen $M + m$, welcher diese Schwere proportional ist, um ihren ebensovielten Theil verringert worden wäre. Das Product aus dem Quadrate der mittlern Bewegung des Mondes in den Würfel seiner mittlern Entfernung von der Erde wird folglich beim gestörten Monde nicht $= K(M + m)$ (§. 65.), sondern $= K(M + m)(1 - \frac{1}{2} w)$ sein, also in dem Verhältnisse von 1 zu $1 - \frac{1}{2} w$ sich verringern. Wenn wir daher die mittlere Bewegung beim gestörten Monde von derselben Grösse n, wie beim ungestörten, annehmen (§. 99.), und die mittlere

Entfernung des ungestörten $= a$, des gestörten $= a_,$ setzen, so wird sein:

$$n^2 a_,^3 = (1 - \tfrac{1}{2} w)\, n^2 a^3,$$

woraus $a_, = (1 - \frac{1}{6} w)\, a = \frac{1071}{1072} \cdot a$ folgt.

Diese kleine Verminderung der mittlern Entfernung werden wir bald noch auf andere Weise bestätigt finden.

b. Ob wir uns die Verminderung des Productes $n^2 a^3$ durch eine Verminderung von a allein, oder von n allein, oder durch eine gleichzeitige Aenderung von a und n erklären, ist offenbar gleichgültig. Ueberhaupt wird sein, wenn wir die mittlere Bewegung und die mittlere Entfernung beim gestörten Monde $n_,$ und $a_,$ nennen:

$$n_,^2 a_,^3 = (1 - \tfrac{1}{2} w)\, n^2 a^3,$$

oder, wenn wir die Verhältnisse $n_, : n$ und $a_, : a$ nur sehr wenig von der Einheit abweichend annehmen und deshalb $n_, = (1 + pw)\, n$ und $a_, = (1 + cw)\, a$ setzen:

$$(1 + pw)^2 (1 + cw)^3 = 1 - \tfrac{1}{2} w, \text{ d. i. } 2p + 3c = -\tfrac{1}{2} \ldots (\alpha)$$

Hieraus folgt, wie vorhin, bei der Annahme, dass $n_,$ mit n gleichen Werth hat, und daher $p = 0$ ist: $c = -\frac{1}{6}$ und damit $a_, = (1 - \frac{1}{6} w)\, a$.

Wollte man dagegen die mittlern Entfernungen a und $a_,$ bei beiden Bewegungen gleich gross annehmen, so würde $c = 0$, folglich $p = -\frac{1}{4}$ und $n_, = (1 - \frac{1}{4} w)\, n$ sein.

Um auch ein Beispiel einer gleichzeitigen Aenderung von n und a zu geben, wollen wir setzen, dass die vom Radius beschriebene Fläche bei der gestörten Bewegung stets eben so gross als bei der ungestörten sei. Weil bei der durch a und n bestimmten Bewegung die vom Radius in der Zeiteinheit beschriebene Fläche $= \frac{1}{2} na^2$ ist, so ist unter der gemachten Voraussetzung:

$$na^2 = n_, a_,^2 = (1 + pw)\, n \,.\, (1 + 2cw)\, a^2,$$

mithin $p + 2c = 0$, woraus in Verbindung mit der Relation (α), $p = -1$ und $c = \frac{1}{2}$, folglich

$$n_, = (1 - w)\, n \text{ und } a_, = (1 + \tfrac{1}{2} w)\, a$$

hervorgeht. — Wir können hieraus noch schliessen, dass, wenn die den Mond störende Kraft bloss aus ihrem mittlern

ihn von der Erde direct abziehenden und daher die Flächengeschwindigkeit nicht ändernden Theile bestände, ohne den Hinzutritt dieser Störung seine mittlero Entfernung um ihren 357sten Theil kleiner und seine mittlere Bewegung um ihren 178sten Theil grösser sein würde.

§. 103.

Zu noch besserer Einsicht in die Natur der störenden Kräfte wollen wir uns die in §. 101. aus den analytischen Ausdrücken für T und V abgeleiteten Resultate durch geometrische Betrachtungen aus den Grundbedingungen der Aufgabe unmittelbar zu beweisen suchen.

Man bezeichne Sonne, Erde und Mond mit S, T und L; die Kraft, mit welcher T von S angezogen wird, setze man $= A$, und die Linien $ST = 1$, $TL = \alpha$, wo daher α nahe $= \frac{1}{400}$. Sei nun L zuerst zwischen S und T (Fig. 36. *a*.), also im Neumonde, so ist $SL = 1 - \alpha$, und folglich die Kraft, mit welcher L von S angezogen wird,

$$= \frac{A}{(1-\alpha)^2} = (1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots) A.$$

Die Kräfte, mit denen T und L von S angezogen werden, haben demach im Neumonde einerlei Richtung, und wenn sie auch gleiche Stärke hätten, so würde durch sie die relative Lage von T und L nicht geändert und L in seiner Bewegung um T nicht gestört werden. Es ist aber die auf L wirkende Kraft um $(2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots) A$ grösser als die auf T wirkende A. Dieser Ueberschuss, welcher etwas mehr als $2\alpha A$, $= \frac{1}{200} A$, beträgt, strebt L von T nach S hin zu entfernen und ist eben deshalb die den Mond zur Neumondszeit störende Kraft der Sonne.

Wenn zweitens L im Vollmonde ist, also wiederum mit S und T in gerader Linie, aber ausserhalb S und T auf der Seite von T sich befindet (Fig. 36. *b*.), so ist $SL = 1 + \alpha$. Die Kraft, womit L von S angezogen wird, ist daher

$$= \frac{A}{(1+\alpha)^2} = (1 - 2\alpha + 3\alpha^2 - \ldots) A,$$

also kleiner, als die Kraft, mit welcher T nach derselben Richtung getrieben wird. Es wird folglich T von L wegge-

zogen, oder vielmehr, weil es hier nur auf die relative Bewegung von L gegen die als ruhend zu denkende Erde ankommt, L von T weggezogen, und dieses mit einer Kraft, welche dem Unterschiede jener Kräfte gleich, also $=$ $(2\alpha - 3\alpha^2 + \ldots)\ A$, also etwas kleiner als $\frac{1}{200}\ A$ ist.

Die Sonne sucht also im Vollmonde sowohl, als im Neumonde, den Mond von der Erde zu entfernen. In beiden Fällen wirkt diese störende Kraft nahe mit derselben Stärke, mit dem 200sten Theile der ganzen Kraft A, mit welcher die Sonne die Erde anzieht. Doch ist die störende Kraft im Neumonde um $6\alpha^2 A$, d. i. um $\frac{3}{80000}\ A$, stärker als im Vollmonde.

Hat L irgend eine andere Stellung gegen T und S, so trage man (Fig. 37.) von T nach S zu eine Linie $TU = A$ und von L nach S zu eine Linie LM, die sich zu TU wie TS^2 zu LS^2 verhält, und die folglich $>, =, <$ TU ist, jenachdem $TS >, =, < LS$. Die Linien TU und LM stellen alsdann die Kräfte vor, mit denen T und L von S angezogen werden. Man mache nun $TN \equiv UM$ und $LO \equiv NM$, $\equiv TU$, und zerlege somit die Kraft LM in LN und LO. Die auf T und L wirkenden einander gleichen und parallelen Kräfte TU und LO bringen aber keine Aenderung in der gegenseitigen Lage von T und L hervor, und es ist mithin die noch übrige Kraft LN allein, welche auf L störend wirkt.

Nehmen wir nun erstens an, dass T und L gleichweit von S entfernt sind, welches, sehr nahe wenigstens, in den Quadraturen der Fall ist. Alsdann ist auch $TU = LM$, folglich UM parallel mit TL, und N ein Punkt in TL (Fig. 38.). Es verhält sich daher $1 : \alpha = TS : TL = NM : NL = A : NL$, woraus $NL = \alpha A$ folgt. Uebereinstimmend mit dem Obigen ist demnach in den Quadraturen die störende Kraft LN nach der Erde gerichtet und halb so gross als die den Mond in den Syzygien von der Erde entfernende Kraft, $= 2\alpha A$.

Ist nicht $LS = TS$, so liegt der Punkt N nicht in TL, aber doch in der Ebene TLS, und zwar mit S auf einerlei Seite von TL, oder auf der entgegengesetzten, jenachdem $LS <$ oder $> TS$. Denn ist $TS > LS$ (Fig. 37.), und wäre dann UM parallel mit TL, so würde $LM < TU$ sein. Es ist

aber alsdann $LM > TU$; mithin müssen TL und UM divergiren, und N muss mit S auf einerlei Seite von TL fallen. — Aehnlicherweise wird der Satz für den zweiten Fall bewiesen, und es erhellet somit, wie sich — übereinstimmend mit dem Obigen — die Kraft LN um L nach rechts dreht, während sich L nach links um T bewegt.

Weil endlich die Kräfte, mit denen T von S und L von T angezogen werden, sich im Mittel wie $n'^2 a' : n^2 a$ (§. 22.) $= w : \alpha$ verhalten, so ist, wenn wir, wie im §. 101., die von T auf L ausgeübte Anziehung zur Einheit der Kraft wählen: $A = w : \alpha$, wodurch, wie gehörig, die zuletzt erhaltenen Ausdrücke $2\alpha A$ und αA für die störende Kraft in den Syzygien und den Quadraturen sich in die vorher gefundenen Ausdrücke $2w$ und w derselben Kraft verwandeln.

Da die Kräfte, mit denen S auf T und L wirkt, nahe einander gleich sind, so folgt hieraus noch, dass auch die Kräfte, mit denen L von S und T angezogen wird, sich nahe wie $w : \alpha = 400 : 179 = 2\frac{1}{4} : 1$ verhalten, und dass daher der Mond mit einer mehr als doppelt stärkeren Kraft nach der Sonne, als nach der Erde hin, gezogen wird. Dass dessen ungeachtet der Mond nicht die Erde verlässt und der Sonne zueilt, kann für uns kein Paradoxon mehr sein.

Drittes Kapitel.

Von den vorzüglichsten Störungen des Mondlaufs und insbesondere von der Variation.

§. 104.

Die vorzüglichsten Störungen des Radius Vector und der Länge des Mondes, zu deren Entwickelung wir jetzt übergehen, sind von dreierlei Art, indem sie entweder von den Excentricitäten der Sonnen- und der Mondsbahn ganz unabhängig sind, oder von der erstern, oder von der letztern Excentricität abhängen; sie führen hiernach resp. die Namen

der Variation, der jährlichen Gleichung und der Evection. Da bei diesen von den Kräften T und V erzeugten Störungen Sonne und Mond als in derselben Ebene sich bewegend angenommen werden (§. 101.), so wollen wir zu ihrer Entwickelung zunächst von den in §. 34. gefundenen Formeln Gebrauch machen, durch welche für eine durch die Polarcoordinaten r und l gegebene nahe kreisförmige und gleichförmige Bewegung eines Körpers in einer Ebene die Kräfte T und V bestimmt werden, welche die Bewegung hervorbringen. Wären nämlich r und l von der Form

$$r = a\,(1 + f' \cos\lambda' + f'' \cos\lambda'' + \ldots)$$
$$l = \lambda + g' \sin\lambda' + g'' \sin\lambda'' + \ldots,$$

wo a und λ die mittlern Werthe von r und l; f', g', ... kleine Brüche, deren Quadrate vernachlässigt werden konnten, und λ, λ', λ'', ... der Zeit proportional wachsende Winkel bedeuteten, so ergäben sich T und V von der Form

$$T = -a\,(n^2 + F' \cos\lambda' + F'' \cos\lambda'' + \ldots)$$
$$V = -a\,(G' \sin\lambda' + G'' \sin\lambda'' + \ldots),$$

wo F', G', ... kleine von f', g', ... und von den Geschwindigkeiten n, n', n'', ..., mit denen sich λ, λ', λ'', ... ändern, abhängige Brüche vorstellten.

Obschon nun im Gegenwärtigen umgekehrt aus den Kräften T und V die Coordinaten r und l gefunden werden sollen, so sieht man doch bald, wie auch zur Lösung dieser umgekehrten Aufgabe jene Formeln benutzt werden können. Da nämlich die Reihen für r und T, so wie die für l und V, von einerlei Form sind und sich im Ganzen nur durch die constanten Coefficienten unterscheiden, so hat man wegen je zweier Glieder in T und V, von denen das Glied in T den Cosinus eines der Zeit proportional wachsenden Winkels, das Glied in V den Sinus desselben Winkels zum Factor hat, auf zwei Glieder mit demselben Cosinus und Sinus in r und l zu schliessen. Auf solche Weise sind die Formen von r und l bestimmt. Die darin noch unbekannten Coefficienten der Cosinus und der Sinus ergeben sich aber dadurch, dass man nach jenen Formeln aus den angenommenen

Formen für r und l die Kräfte T und V herleitet und diese mit den gegebenen Werthen von T und V in Vergleichung bringt. Das Uebrige, was hierbei noch zu bemerken ist, wird sich am besten aus den nun folgenden Rechnungen selbst erkennen lassen.

§. 105.

Um uns den Anfang unserer Untersuchungen möglichst leicht zu machen, wollen wir für's Erste nicht die Bewegung, welche der von der Sonne gestörte Mond wirklich hat, sondern unter allen, welche er bei dieser Störung möglicher Weise haben kann, diejenige zu bestimmen suchen, welche von der Kreisform und der Gleichförmigkeit am wenigsten abweicht, so dass die Grössen, um welche r und l von ihren mittlern Werthen unterschieden sind, nur von der Störung herrühren und daher den kleinen Störungscoefficienten w zum Factor haben.

Heisse λ der mittlere Werth von l. Die constante Geschwindigkeit, mit welcher sich λ ändert, ist $= n$, und der hieraus nach der elliptischen Theorie folgende mittlere Werth von r ist in §. 99. mit a bezeichnet worden. Wie wir bereits aus §. 102 wissen, ist hiervon der mittlere Werth von r bei der gestörten Bewegung um etwas Weniges verschieden; werde letzterer, wie dort, $= a_{,}$, und sein Unterschied von a, als von der Störung herrührend, $= acw$, also

$$a_{,} = a\,(1 + cw).$$

gesetzt, wo c eine noch zu bestimmende constante Zahl (nach §. 102. $= -\frac{1}{6}$) ist.

Ferner wollen wir möglichster Einfachheit willen die Excentricität der Sonnenbahn für den Anfang unberücksichtigt lassen und daher $r' = a'$ und die Länge l' ihrem mittlern Werthe, welcher λ' sei, gleich setzen.

Erwägen wir nun noch, dass hier bloss die erste Potenz von w in Betracht kommen soll, und dass daher in den mit w multiplicirten Gliedern statt r und l ihre mittlern Werthe $a\,(1 + cw)$ und λ, oder auch schlechthin a und λ, gesetzt

werden können, so reduciren sich die in §. 99. für T_1 und V_1 erhaltenen Werthe auf

$$(1) \quad \begin{cases} T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w\,[1 + 3\cos 2\,(\lambda - \lambda')], \\ V_1 = -\frac{3}{2}w \sin 2\,(\lambda - \lambda'). \end{cases}$$

Nach der im vorigen §. gemachten Bemerkung können wir nun erwarten, dass, eben so wie in T_1 und V_1, auch in r und l resp. mit $w\cos$ und $w\sin 2\,(\lambda - \lambda')$ multiplicirte Glieder vorkommen und dass daher r und l ihren mittlern um solche Glieder vermehrten Werthen gleich sein werden. Wir setzen demnach

$$(2) \quad \begin{cases} r = a\,(1 + cw)\,[1 + fw\cos\lambda_1], \\ l = \lambda + gw\sin\lambda_1, \end{cases}$$

wo f und g endliche constante Zahlen sind, und zur Abkürzung λ_1 statt $2\,(\lambda - \lambda')$ geschrieben worden. Hieraus folgt zunächst

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2cw - 2fw\cos\lambda_1,$$

und nach Substitution desselben in (1):

$$(3) \quad \begin{cases} T_1 = -1 + (\frac{1}{2} + 2c)\,w + (\frac{3}{2} + 2f)\,w\cos\lambda_1, \\ V_1 = -\frac{3}{2}w\sin\lambda_1. \end{cases}$$

Aus (2) aber fliesst nach den Formeln in §. 34.:

$$T = -a\,(1 + cw)\,\{n^2 + [(n^2 + n_1^2)\,f + 2nn_1 g]\,w\cos\lambda_1\}$$
$$V = -a\,(1 + cw)\,[2nn_1 f + n_1^2 g]\,w\sin\lambda_1,$$

wo n_1 die Geschwindigkeit von λ_1 bedeutet; und wenn wir mit $n^2 a$ dividiren (§. 99.) und $n_1 = kn$ setzen:

$$(4) \quad \begin{cases} T_1 = -1 - cw - [(1 + k^2)\,f + 2kg]\,w\cos\lambda_1, \\ V_1 = -[2kf + k^2 g]\,w\sin\lambda_1. \end{cases}$$

Diese unmittelbar aus (2) gefolgerten Werthe von T_1 und V_1 müssen nun, wenn anders die Voraussetzung (2) richtig war, mit den Werthen (3) derselben Grössen durch gehörige Bestimmung der Constanten c, f und g identisch gemacht werden können, so dass die Coefficienten von $\cos\lambda_1$ und $\sin\lambda_1$ und das noch übrige constante Glied in (4) den entsprechenden Grössen in (3) gleich werden, dass also

$$-c = \frac{1}{2} + 2c,$$
$$-(1 + k^2)\,f - 2kg = \frac{3}{2} + 2f, \quad 2kf + k^2 g = \frac{3}{2}.$$

In der That lassen sich aus diesen Gleichungen c, f und g ohne Widerspruch bestimmen, nämlich

$c = -\frac{1}{6}$, wie schon in §. 102. *a.* gefunden wurde;

$$f = -\frac{3}{2}\cdot\frac{k+2}{k(k^2-1)},\quad g = \frac{3}{2}\cdot\frac{k^2+2k+3}{k^2(k^2-1)}.$$

Die in (2) angenommene Form von r und l ist demnach die richtige, und die darin eingeführten Constanten c, f und g müssen die jetzt gefundenen Werthe haben, wenn die aus (2) herzuleitenden Kräfte mit den in (1) gegebenen, wie verlangt wird, übereinstimmen sollen.

§. 106.

Es bleibt uns noch übrig die Werthe von fw und gw numerisch zu entwickeln. — Die Geschwindigkeit, mit welcher sich $\lambda_1, = 2(\lambda - \lambda')$, ändert, ist $= n_1 = 2(n - n')$; folglich

$$k = \frac{n_1}{n} = 2\,\frac{n-n'}{n} = 2\cdot\frac{12,36875}{13,36875}\ (\text{§. } 100.)$$
$$= 1,8504.$$

Hiermit findet sich

$$f = -1,2876,\quad g = 1,8297,\ \text{also (§. 100.)}$$
$$fw = -\frac{1,2876}{178,72} = -\frac{1}{138,80} = -0,007204,$$
$$gw = \frac{1,8297}{178,72} = \frac{1}{97,677} = 0,010238.$$

Bei diesem Werthe von gw wird die Länge l, in welcher er vorkömmt, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt vorausgesetzt. Soll aber, wie gewöhnlich, l in Graden, Minuten und Secunden bestimmt werden, so muss dieses auch mit gw geschehen. Nun ist w, in Secunden ausgedrückt,

$$= \frac{1}{178,72}\cdot\frac{1''}{\sin 1''} = 1154'',1 = 19'\,14'',1,$$

und daher $gw = 1,8297 \times 1154'',1 = 35'\,12''$.

Nach diesem Allen wird

$$r = a,[1 - 0,007204 \cos 2(\lambda - \lambda')],$$
$$l = \lambda + 35'\,12'' \sin 2(\lambda - \lambda').$$

§. 107.

Die somit gefundene Bewegung des Mondes weicht von seiner mittlern gleichförmigen Kreisbewegung dergestalt ab, dass seine wahre Entfernung von der Erde um den 139sten Theil der mittlern bald grösser, bald kleiner, als die mittlere ist, und dass, von der Erde aus gesehen, der wahre Ort des Mondes bis auf 35′ dem mittlern bald vorauseilt, bald hinter ihm zurückbleibt.

Am grössten ist die Entfernung, nämlich $= \frac{140}{139} a_{,}$, für $\cos 2 (\lambda - \lambda') = -1$, also in den Quadraturen (§. 101.); am kleinsten, $= \frac{138}{139} a_{,}$, für $\cos 2 (\lambda - \lambda') = 1$, also in den Syzygien, und der Mond beschreibt hiernach eine Art Ellipse, in deren Mittelpunkte die Erde steht, und deren kleinster Durchmesser in die Linie der Syzygien fällt. Siehe Fig. 38.

Hinsichtlich der Länge fällt der wahre Mondsort mit dem mittlern zusammen für $\sin 2 (\lambda - \lambda') = 0$, also in den Syzygien und Quadraturen; dagegen ist der wahre Ort W dem mittlern M am weitesten, nämlich um 35′, voraus für $\sin 2 (\lambda - \lambda') = 1$, d. i. in den Mitten A und C des ersten und des dritten Quadranten; und um ebensoviel hinter dem mittlern Orte zurück für $\sin 2 (\lambda - \lambda') = -1$, d. i. in den Mitten B und D des zweiten und des vierten Quadranten. Von D bis A und von B bis C ist folglich die wahre Geschwindigkeit des Mondes grösser als die mittlere; dagegen von A bis B und von C bis D kleiner als die mittlere.

Dasselbe ergiebt sich auch, wenn man aus der Gleichung für l die Geschwindigkeit, mit welcher l wächst, bestimmt. Nach §. 35. (C) findet sich dieselbe

$$= n + n_{,} g w \cos \lambda_1 = n [1 + k g w \cos 2 (\lambda - \lambda')],$$

wo $k g w = \frac{1,8504}{97,677} = \frac{1}{52,8}$. Der grösste und der kleinste Werth dieser Geschwindigkeit ist hiernach von ihrem mittlern Werthe n um den 53sten Theil des mittlern verschieden. Am grössten ist sie in den Syzygien, am kleinsten in den Quadraturen; in den Octanten hat sie ihren mittlern Werth. Uebereinstimmend mit dem Vorigen, nimmt sie daher

Digitized by Google

im ersten Quadranten ab, im zweiten zu, und so fort abwechselnd.

§. 108.

Es ist nicht schwer, sich von der Richtigkeit dieser Resultate im Allgemeinen auch ohne Rechnung zu überzeugen. Zuerst erklärt sich die von einem Quadranten zum andern abwechselnd ab- und zunehmende Geschwindigkeit des Mondes sogleich dadurch, dass der auf dem Radius Vector perpendikulare und daher nahe in der Richtung der Bahn wirkende Theil der störenden Kraft den Mond derjenigen der beiden Syzygien, welcher er am nächsten ist, noch näher zu bringen strebt (§. 101). Wäre ferner die Kraft, welche den Mond nach der Erde treibt, überall gleich gross, so würde schon deshalb, weil die Geschwindigkeit in den Syzygien am grössten und in den Quadraturen am kleinsten ist, die Bahn in den erstern Punkten am schwächsten, in den letztern am stärksten gekrümmt sein; denn je grösser die Geschwindigkeit eines Körpers ist, desto weniger wird er durch eine auf seiner Bahn perpendikulare Kraft von der Bahn abgelenkt. Da aber die den Mond nach der Erde ziehende Kraft durch die Sonne in den Syzygien geschwächt und in den Quadraturen verstärkt wird, so muss um so mehr die Krümmung in den Syzygien schwächer, als in den Quadraturen sein. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn sich der Mond in den Quadraturen weiter als in den Syzygien von der Erde entfernt; — auf ähnliche Art, als wie bei der in §. 24. 2. betrachteten elliptischen Bewegung eines Körpers die nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtete Kraft am stärksten bei der grössten Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte und am schwächsten bei der kleinsten Entfernung war.

§. 109.

Die Glieder, welche zu den mittlern Werthen des Radius Vector und der Länge addirt werden müssen, um die wahren Werthe dieser Grössen zu erhalten, nennt man Gleichungen. Sie sind in der Regel Producte aus Constanten in Cosinusse

(beim Radius) und in Sinusse (bei der Länge) von Winkeln, welche vom mittlern Stande des gestörten und des störenden Körpers gegen einander und gegen ihre Apsiden abhängen und folglich der Zeit proportional wachsen. Es sind daher diese Gleichungen periodischer Natur, und die durch sie ausgedrückten Störungen periodische Störungen. Die Zeit, in welcher der Winkel um 360° wächst, ist die Periode der Gleichung oder Störung und wird gefunden, wenn man die Geschwindigkeit seines Wachsthums in 360° dividirt (§. 34. Zusatz). Der Winkel selbst heisst das Argument und die in seinen Cosinus oder Sinus multiplicirte Constante der Coefficient der Gleichung. Letzterer giebt zugleich den grössten Werth an, bis zu welchem die Gleichung nach der positiven und der negativen Seite anwachsen kann.

Mit den in §§. 105. und 106. entwickelten Werthen von r und l haben wir demnach zwei Gleichungen, die eine für r, die andere für l, gefunden, deren jede zu ihrem Argumente die doppelte Winkelentfernung des Mondes von der Sonne, uud folglich zu ihrer Periode einen halben synodischen Monat hat. Die Argumente dieser Gleichungen aber sind $-$ 0,007204 . $a_,$ und 35′ 12″. Die Folge wird lehren, dass, ungeachtet die Mondsbewegung nicht so einfach ist, als wie sie durch die jetzt für r und l erhaltenen Werthe dargestellt wird, unter den vielen zu den mittlern Werthen von r und l hinzuzufügenden Gleichungen immer auch die zwei jetzt gefundenen mit vorkommen. Von diesen ist besonders die Gleichung der Länge für die Beobachtungen sehr merkbar, da ihr Werth bis über einen halben Grad anwachsen kann. Sie wird die Variation genannt und ist von Tycho de Brahe (geb. 1546, gest. 1601) durch Beobachtungen entdeckt worden.

§. 110.

Die Veränderungen des Radius Vector des Mondes geben sich durch Beobachtung seines scheinbaren Halbmessers und seiner Horizontalparallaxe zu erkennen, indem diese letztern dem Radius Vector umgekehrt proportional sind. Eben deshalb wird auch jede Gleichung des Radius Vector eine

Gleichung des scheinbaren Halbmessers und der Horizontalparallaxe zur Folge haben. In der That sei p die Aequatorialhorizontalparallaxe oder der Winkel, unter welchem der Halbmesser des Erdäquators vom Mittelpunkte des Mondes aus bei einer Entfernung des Mondes von der Erde $= r$ erscheint. Der mittlere Werth dieses Winkels oder derjenige, welcher für $r = a_{,}$ statt hat, beträgt 57′ 1″. Mithin ist

$$p = \frac{a_{,}}{r} \,.\, 57' \, 1''.$$

Substituirt man hierin für r seinen in §. 106. gefundenen Werth, so wird

$$\begin{aligned} p &= (1 + 0,007204 \cos 2(\lambda - \lambda')) \,.\, 57' \, 1'' \\ &= 57' \, 1'' + 24'',6 \cos 2(\lambda - \lambda'), \end{aligned}$$

und man hat somit das Glied $24'',6 \cos 2(\lambda - \lambda')$, als Gleichung der Horizontalparallaxe, erhalten.

Eben so findet sich der scheinbare Halbmesser des Mondes

$$\begin{aligned} &= (1 + 0,007204 \cos 2(\lambda - \lambda')) \,.\, 15' \, 33'',5 \\ &= 15' \, 33'',5 + 6'',7 \cos 2(\lambda - \lambda'); \end{aligned}$$

denn 15′ 33″, 5 ist der scheinbare Halbmesser des Mondes in seiner mittleren Entfernung von der Erde.

Weil bei astronomischen Rechnungen die Horizontalparallaxe des Mondes häufiger, als sein Radius Vector, gebraucht wird, so geben die Tafeln, die man zur Berechnung des Mondlaufs construirt hat, unmittelbar die Horizontalparallaxe p, aus der man, wenn es nöthig ist, den Radius nach der Formel $r = a_{,} \,.\, \frac{57' \, 1''}{p}$ herleiten kann.

§. 111.

Bei der Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{r}{r}$ und w, die wir uns hier gestatten (§§. 99. und 100.), können wir nicht erwarten, dass die Coefficienten der erhaltenen Gleichungen und derer, welche wir noch entwickeln werden, mit den Coefficienten, welche bei Berücksichtigung jener Potenzen sich finden, ganz übereinstimmen werden, so wie aus demselben Grunde bei einer schärfer geführten

Rechnung eine bei weitem grössere Anzahl von Gleichungen. als hier, sich ergeben wird. In Damoiseau's Mondstafeln, welche von den Beobachtungen sich nur um wenige Secunden entfernen, sind von den Gleichungen für die Länge und die Horizontalparallaxe, welche $2(\lambda - \lambda')$ zum Argumente haben, die Coefficienten $39' 29'', 7$ und $28'', 5$ statt der hier gefundenen $35' 12''$ und $24'', 6$. Ueberhaupt aber sind in diesen Tafeln die von den Excentricitäten der Monds- und Sonnenbahn unabhängigen Gleichungen

$$\text{der Länge: } -2' 2'', 1 \sin \delta + 39' 29'', 7 \sin 2\delta + 0'', 4 \sin 3\delta + 14'', 2 \sin 4\delta$$

$$\text{der Horizontalparallaxe: } -1'', 0 \cos \delta + 28'', 5 \cos 2\delta + 0'', 2 \cos 4\delta,$$

wo $\delta = \lambda - \lambda'$. — Historisch werde hierbei noch bemerkt, dass die erste dieser Gleichungen mit dem nicht unbeträchtlichen Coefficienten von $2' 2''$ daher rührt, dass der Mond im Neumonde etwas stärker als im Vollmonde von der Erde abgezogen wird. Das Verhältniss zwischen diesen Abziehungen hängt von dem Verhältnisse zwischen den Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde ab (§. 103.); und da letzteres Verhältniss einerlei mit dem zwischen den Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes ist, so wird jene Gleichung auch die parallaktische Gleichung genannt.

Viertes Kapitel.

Von der jährlichen Gleichung.

---

§. 112.

Eben so, wie uns im Vorigen das Vorhandensein von Störungsgleichungen, deren Argument $2(\lambda - \lambda')$ war, durch die in w multiplicirten Glieder von T und V, welche dasselbe Argument hatten, angedeutet wurde, so können sich auch die Argumente aller übrigen Gleichungen durch nichts an-

deres, als die weitere Entwickelung dieser in w multiplicirten Glieder, zu erkennen geben. Auch wird uns dieselbe Methode, nach welcher wir die Coefficienten der Gleichungen, deren Argument $2(\lambda - \lambda')$ war, bestimmten, zur Ermittelung der Coefficienten der übrigen Gleichungen dienen können, so lange wir noch, wie in §. 105., voraussetzen, dass die Bewegung des Mondes von einer vollkommen kreisförmigen und gleichförmigen Bewegung bloss wegen der Störung durch die Sonne abweicht.

In der That sei durch weitere Entwickelung der in w multiplicirten Glieder

$$(1)\quad \begin{cases} T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w + F_1 w \cos\lambda_1 + F_2 w \cos\lambda_2 + \ldots \\ V_1 = G_1 w \sin\lambda_1 + G_2 w \sin\lambda_2 + \ldots \end{cases}$$

gefunden worden, wo F_1, G_1, F_2, ... endliche Constanten, und λ_1, λ_2, ... mit den constanten Geschwindigkeiten n_1, n_2, ... sich ändernde Winkel bedeuten. Hiernach werden auch die Coordinaten r und l mit w behaftete periodische Glieder, deren Argumente λ_1, λ_2, ... sind, und keine andern, enthalten. Wir setzen deshalb, und wegen der zu erwarten stehenden Aenderung der elliptischen Relation zwischen n und a (§. 102.):

$$(2)\quad \begin{cases} r = a(1 + cw)[1 + f_1 w \cos\lambda_1 + f_2 w \cos\lambda_2 + \ldots] \\ l = \lambda + g_1 w \sin\lambda_1 + g_2 w \sin\lambda_2 + \ldots \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2cw - 2f_1 w \cos\lambda_1 - 2f_2 w \cos\lambda_2 - \ldots,$$

und es wird damit

$$(3)\quad \begin{cases} T_1 = -1 + (\frac{1}{2} + 2c)\, w + (F_1 + 2f_1)\, w \cos\lambda_1 + \ldots \\ V_1 = G_1 w \sin\lambda_1 + G_2 w \sin\lambda_2 + \ldots \end{cases}$$

Entwickelt man aber nach §. 34. die Kräfte, von welchen die durch (2) ausgedrückte Bewegung hervorgebracht wird, dividirt dieselben durch $n^2 a$ und setzt zur Abkürzung $n_1 = k_1 n$, $n_2 = k_2 n$, etc., so kommt (vergl. §. 105.):

$$(4)\begin{cases} T_1 = -1 - cw - [(1 + k_1^2) f_1 + 2k_1 g_1]\, w \cos\lambda_1 - \ldots \\ V_1 = -[2k_1 f_1 + k_1^2 g_1]\, w \sin\lambda_1 - [2k_2 f_2 + k_2^2 g_2]\, w \sin\lambda_2 - \ldots \end{cases}$$

Da nun diese Werthe von T_1 und V_1 mit denen in (3) von einerlei Form sind, so wird die durch (2) dargestellte Bewegung, eben so, wie sie eine Folge der Kräfte (4) ist, auch als eine Folge der Kräfte (3) oder (1) angesehen werden können, wenn wir die Coefficienten in (2) so bestimmen, dass die in (3) und (4) entsprechenden Gliedern zugehörigen Coefficienten einander gleich werden, dass also

$$-c = \tfrac{1}{2} + 2c,$$

$$-(1+k_1^2)f_1 - 2k_1 g_1 = F_1 + 2f_1, \quad -2k_1 f_1 - k_1^2 g_1 = G_1,$$

$$-(1+k_2^2)f_2 - 2k_2 g_2 = F_2 + 2f_2, \quad -2k_2 f_2 - k_2^2 g_2 = G_2,$$

u. s. w. Aus der ersten dieser Gleichungen fliesst aber

$$c = -\tfrac{1}{6}, \text{ wie in §. 105.};$$

aus den zwei folgenden:

$$f_1 = -\frac{k_1 F_1 - 2G_1}{k_1 (k_1^2 - 1)}, \quad g_1 = \frac{2k_1 F_1 - (3 + k_1^2)\, G_1}{k_1^2 (k_1^2 - 1)};$$

aus den zwei nächstfolgenden:

$$f_2 = -\frac{k_2 F_2 - 2G_2}{k_2 (k_2^2 - 1)}, \quad g_2 = \frac{2k_2 F_2 - (3 + k_2^2)\, G_2}{k_2^2 (k_2^2 - 1)};$$

u. s. w., wodurch die Coefficienten in (2), und damit die gesuchte Bewegung, vollkommen bestimmt sind.

§. 113.

Im vorigen Kapitel haben wir bei Bestimmung der einfachsten Bahn, welche der von der Sonne gestörte Mond beschreiben kann, die Bewegung der Sonne genau kreis- und gleichförmig angenommen. Wir wollen aber jetzt die in der Natur von dieser Hypothese statt findende Abweichung nicht mehr unberücksichtigt lassen und den Einfluss untersuchen, den die Excentricität e' der Sonnenbahn auf die Mondsbewegung ausübt.

Weil auch jetzt noch r und l von ihren mittlern Werthen a und λ nur um Glieder verschieden sein sollen, welche von der Störung herrühren und daher w zum Factor haben, und weil von w immer nur die erste Potenz berücksichtigt werden soll, so haben wir

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{a'^3}{r'^3} w\,[1 + 3\cos 2(\lambda - l')],$$

$$V_1 = -\frac{3}{2}\frac{a'^3}{r'^3} w \sin 2(\lambda - l'),$$

worin für r' und l' ihre elliptischen Werthe zu substituiren sind. Diese sind, wenn α' die mittlere Anomalie der Sonne bezeichnet:

$r' = a'(1 - e'\cos\alpha')$ und $l' = \lambda' + 2e'\sin\alpha'$ (§. 43.).

Hieraus folgt:

$$\frac{a'^3}{r'^3} = 1 + 3e'\cos\alpha',$$

$$2(\lambda - l') = \lambda_1 - 4e'\sin\alpha',$$

wenn wiederum $2(\lambda - \lambda') = \lambda_1$ gesetzt wird; mithin

$$\cos 2(\lambda - l') = \cos\lambda_1 + 4e'\sin\alpha'\sin\lambda_1 \,{}^{*)}$$
$$= \cos\lambda_1 + 2e'\cos(\lambda_1 - \alpha') - 2e'\cos(\lambda_1 + \alpha'),$$

$$\sin 2(\lambda - l') = \sin\lambda_1 - 4e'\sin\alpha'\cos\lambda' \,{}^{*)}$$
$$= \sin\lambda_1 + 2e'\sin(\lambda_1 - \alpha') - 2e'\sin(\lambda_1 + \alpha'),$$

$$\frac{a'^3}{r'^3}\cos 2(\lambda - l') = \cos\lambda_1 + 2e'\cos(\lambda_1 - \alpha') - 2e'\cos(\lambda_1 + \alpha')$$
$$+ 3e'\cos\alpha'\cos\lambda_1$$
$$= \cos\lambda_1 + \tfrac{7}{2}e'\cos(\lambda_1 - \alpha') - \tfrac{1}{2}e'\cos(\lambda_1 + \alpha')$$

und eben so

$$\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2(\lambda - l') = \sin\lambda_1 + \tfrac{7}{2}e'\sin(\lambda_1 - \alpha') - \tfrac{1}{2}e'\sin(\lambda_1 + \alpha').$$

Die Substitution hiervon in den obigen Werthen von T_1 und V_1 giebt:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}w + \tfrac{3}{2}w\cos\lambda_1 + \tfrac{3}{2}e'w\cos\alpha'$$
$$+ \tfrac{21}{4}e'w\cos(\lambda_1 - \alpha') - \tfrac{3}{4}e'w\cos(\lambda_1 + \alpha'),$$

$$V_1 = -\tfrac{3}{2}w\sin\lambda_1 - \tfrac{21}{4}e'w\sin(\lambda_1 - \alpha') + \tfrac{3}{4}e'w\sin(\lambda_1 + \alpha').$$

Hiermit sind die Ausdrücke für T_1 und V_1 auf die im vorigen §. angenommene Form (1) gebracht, und es wird

---

*) Nach den Formeln

$$\cos(x - i) = \cos x + i\sin x$$

und

$$\sin(x - i) = \sin x - i\cos x,$$

wenn von i nur die erste Potenz beibehalten wird.

sich nun die aus ihnen folgende Bewegung nach den daselbst entwickelten Formeln leicht bestimmen lassen. — Zuerst sind die dortigen Argumente

$$\lambda_1 = \lambda_1,\ \lambda_2 = \alpha',\ \lambda_3 = \lambda_1 - \alpha',\ \lambda_4 = \lambda_1 + \alpha';$$

also $n_1 = 2(n - n')$ (§. 106.); $n_2 = n'$, weil $\alpha' = \lambda' - \omega'$ (§. 45.), und weil die Länge des Perigäums der Sonnenbahn ω' constant ist, wenigstens hier als constant angesehen werden kann; $n_3 = n_1 - n_2$; $n_4 = n_1 + n_2$. Ferner sind die dortigen Coefficienten

$$F_1 = \tfrac{3}{2},\ F_2 = \tfrac{3}{2}e',\ F_3 = \tfrac{21}{4}e',\ F_4 = -\tfrac{3}{4}e',$$
$$G_1 = -\tfrac{3}{2},\ G_2 = 0,\ G_3 = -\tfrac{21}{4}e',\ G_4 = \tfrac{3}{4}e'.$$

Mit diesen Werthen von $F_1, G_1, F_2, \ldots$ und den aus $n_1, n_2, \ldots$ fliessenden Werthen von

$$k_1 = 2\left(1 - \frac{n'}{n}\right),\ k_2 = \frac{n'}{n},\ k_3 = k_1 - k_2,\ k_4 = k_1 + k_2$$

finden sich nun für f_1 und g_1 die bereits in §. 105. erhaltenen Ausdrücke und nächstdem

$$f_2 = \tfrac{3}{2}e' \cdot \frac{1}{1 - k_2^2}, \qquad g_2 = -3e' \cdot \frac{1}{k_2(1 - k_2^2)},$$
$$f_3 = -\tfrac{21}{4}e' \cdot \frac{2 + k_3}{k_3(k_3^2 - 1)}, \quad g_3 = \tfrac{21}{4}e' \cdot \frac{3 + 2k_3 + k_3^2}{k_3^2(k_3^2 - 1)},$$
$$f_4 = \tfrac{3}{4}e' \cdot \frac{2 + k_4}{k_4(k_4^2 - 1)}, \qquad g_4 = -\tfrac{3}{4}e' \cdot \frac{3 + 2k_4 + k_4^2}{k_4^2(k_4^2 - 1)};$$

und hiermit die gesuchten Coordinaten:

$$r = a_{,}[1 + f_1 w \cos\lambda_1 + f_2 w \cos\alpha' + f_3 w \cos(\lambda_1 - \alpha') + f_4 w \cos(\lambda_1 + \alpha')],$$
$$l = \lambda + g_1 w \sin\lambda_1 + g_2 w \sin\alpha' + g_3 w \sin(\lambda_1 - \alpha') + g_4 w \sin(\lambda_1 + \alpha').$$

§. 114.

Wegen der Excentricität der Sonnenbahn kommen demnach sowohl für den Radius Vector, als für die Länge, drei Gleichungen hinzu, welche die Anomalie der Sonne und den doppelten Winkelabstand des Mondes von der Sonne, das einemal um die Anomalie der Sonne vermindert, das anderemal um dieselbe vermehrt, zu Argumenten haben, und deren

Coefficienten Producte aus der Excentricität e' der Sonnenbahn in gewisse Functionen des Verhältnisses $n' : n$ zwischen den mittlern Bewegungen von Sonne und Mond sind. Um diese Coefficienten jetzt numerisch zu bestimmen, so ist

$$e' = 0,016792,\ k_2 = \frac{n'}{n} = 0,074801,$$

folglich $k_1 = 2\,(1 - k_2) = 1,8504$,

$$k_3 = k_1 - k_2 = 1,7756,\ k_4 = k_1 + k_2 = 1,9252.$$

Mit diesen Werthen für e', k_2, ... und mit w ($= k_2^2$) $= 0,005595$ finden sich die Werthe von

$$f_2 w = 0,000142,\ f_3 w = -0,000487,\ f_4 w = 0,000053.$$

Ferner ergeben sich, wenn man für w seinen in Secunden ausgedrückten Werth $= 1154'', 1$ (§. 106.) nimmt:

$$g_2 w = -13'\,2'',\ g_3 w = 2'\,25'',\ g_4 w = -15'';$$

und es wird daher und nach §. 106.:

$$\frac{r}{a_{\prime}} = 1 - 0,007204 \cos \lambda_1 + 0,000142 \cos \alpha'$$
$$- 0,000487 \cos (\lambda_1 - \alpha') + 0,000053 \cos (\lambda_1 + \alpha'),$$
$$l = \lambda + 35'\,12'' \sin \lambda_1 - 13'\,2'' \sin \alpha' + 2'\,25'' \sin (\lambda_1 - \alpha')$$
$$- 15'' \sin (\lambda_1 + \alpha').$$

Aus dem Werthe für r fliesst noch die Horizontalparallaxe (§. 110.) $= \frac{a_{\prime}}{r} . 57'\,1''$

$$= 57'\,1'' + 24'', 6 \cos \lambda_1 - 0'', 5 \cos \alpha' + 1'', 7 \cos (\lambda_1 - \alpha')$$
$$- 0'', 2 \cos (\lambda_1 + \alpha').$$

Nach Damoiseau sind die Coefficienten der drei letzten Glieder für die Länge

$$-11'\,13'', 0;\ +2'\,45'', 5;\ -24'', 6;$$

für die Horizontalparallaxe: $-0'', 3$; $+1'', 9$; $-0'', 3$.

§. 115.

Unter den jetzt gefundenen von der Excentricität der Sonnenbahn herrührenden Gleichungen ist die bei weitem beträchtlichste die Gleichung für die Länge, deren Argument die mittlere Anomalie der Sonne und deren Coefficient nach unserer Rechnung $-13'$, richtiger $-11'$, ist. Sie ist eben

so, wie die Variation, von Tycho de Brahe entdeckt worden, und wird, weil sie zu ihrer Periode ein Jahr (ein anomalistisches) hat, die jährliche Gleichung genannt.

Das Argument dieser Gleichung ist dasselbe, welches die Mittelpunktsgleichung der Sonne, $+ 2e' \sin \alpha'$, hat, nur das Zeichen das entgegengesetzte. Lassen wir daher die übrigen Gleichungen unberücksichtigt, so ist zufolge der jährlichen Gleichung der wahre Mondsort desto mehr — bis auf 11′ — dem mittleren voraus oder hinter ihm zurück, je mehr der wahre Sonnenort hinter dem mittlern zurück oder ihm voraus ist. Es wird mithin auch die wahre Winkelgeschwindigkeit des Mondes grösser oder kleiner als die mittlere sein, je nachdem die wahre Winkelgeschwindigkeit der Sonne kleiner oder grösser als ihre mittlere ist.

Dasselbe giebt auch geradezu die aus der Länge $\lambda - 11' \, 13'' \sin \alpha'$ nach §. 35. gefolgerte Geschwindigkeit

$$= n - 11' \, 13''. \sin 1''. n' \cos \alpha' = n\,(1 - 0{,}000244 \cos \alpha')$$

zu erkennen, wonach der grösste und der kleinste Werth der wahren Geschwindigkeit $= 1 \pm 0{,}000244$ der mittlern sind und für $\alpha' = 180^0$ und $= 0$, also dann statt finden, wenn die Sonne in der Erdferne und in der Erdnähe ist und daher ihre kleinste und ihre grösste Geschwindigkeit hat.

Auf ähnliche Weise verhält es sich auch mit dem Radius Vector des Mondes. Denn die Gleichung für denselben, welche mit der jährlichen Gleichung einerlei Argument hat, ist $0{,}000142 \cos \alpha'$, und folglich der Radius des Mondes am grössten, wenn $\alpha' = 0$ und mithin der Radius der Sonne am kleinsten ist; dagegen ist der Radius des Mondes am kleinsten für $\alpha' = 180^0$, wo der Radius der Sonne am grössten ist.

In dem Halbjahre also, in welchem sich die Sonne von der Erde entfernt und ihre Geschwindigkeit sich verringert (vom 1. Januar bis 2. Juli), kommt der Mond der Erde näher und seine Geschwindigkeit wächst. In dem folgenden Halbjahre aber, in welchem sich die Sonne der Erde wieder nähert und ihre Geschwindigkeit zunimmt, entfernt sich der Mond von der Erde und seine Geschwindigkeit nimmt ab.

§. 116.

Um uns den Grund dieser Erscheinung unmittelbar aus der Natur der störenden Kraft deutlich zu machen, dürfen wir nur erwägen, dass diese Kraft, abgesehen von einem bestimmten Orte des Mondes in seiner Bahn, den Mond von der Erde zu entfernen strebt (§. 102.), und dieses offenbar desto stärker, je näher die Sonne der Erde ist. Das Glied, welches diese von einem bestimmten Orte des Mondes unabhängige Kraft darstellt, ist das in T_1 vorkommende $\frac{1}{2}\frac{a'^3}{r'^3}w$ (§. 113.) und giebt damit zu erkennen, dass diese Kraft dem Würfel der Entfernung der Sonne von der Erde umgekehrt proportional ist.

Je nachdem sich daher die Sonne der Erde nähert oder von ihr entfernt, muss der Radius des Mondes wachsen oder abnehmen; und da die Kraft selbst, welche dieses bewirkt, in der Richtung des Radius wirkt, mithin seine Flächengeschwindigkeit unverändert lässt, so wird im erstern Falle seine Winkelgeschwindigkeit kleiner, im letztern grösser werden.

Zusatz. Dass sich bei der jetzt in Rede stehenden Ungleichheit die Flächengeschwindigkeit nicht ändert, geht auch leicht aus den diese gestörte Bewegung ausdrückenden Formeln

$$r = a_{,}[1 + f_2 w \cos \alpha'] \text{ und } l = \lambda + g_2 w \sin \alpha'$$

hervor. Bedeutet nämlich, wie in §. 35., l' die Geschwindigkeit von l, so ist

$$l' = n + n' g_2 w \cos \alpha' = n\,(1 + k_2 g_2 w \cos \alpha')$$

und damit die doppelte Flächengeschwindigkeit (ebendas.)

$$= rrl' = a_{,}^2 n\,(1 + 2f_2 w \cos \alpha')\,(1 + k_2 g_2 w \cos \alpha')$$
$$= a_{,}^2 n\,[1 + (2f_2 + k_2 g_2)\, w \cos \alpha'] = a_{,}^2 n,$$

also constant, weil nach den in §. 113. für f_2 und g_2 gefundenen Werthen $2f_2 + k_2 g_2 = 0$ ist.

Fünftes Kapitel.

Von der Evection.

---

§. 117.

Wir haben in dem Vorhergehenden eine sehr nahe kreis- und gleichförmige Bewegung gefunden, welche der in seinem Laufe um die Erde von der Sonne gestörte Mond möglicher Weise haben kann, und in dem Falle auch wirklich haben würde, wenn irgend einmal seinem Radius Vector und seiner Länge, so wie den Geschwindigkeiten, mit denen sich beide ändern, diejenigen Werthe zugekommen wären, welche aus den vorhin (§. 114.) für r und l erhaltenen Ausdrücken fliessen (§ 25.).

Statt dieser Bewegung, die sich von einer vollkommen kreis- und gleichförmigen nur durch die mit w behafteten Glieder unterscheidet, geben aber die Beobachtungen deutlich genug eine Ellipse als Grundform der Mondsbahn zu erkennen. Die Excentricität dieser Ellipse ist $= \frac{1}{18}$, und die daraus folgende Mittelpunktsgleichung (§. 43.) hat einen Coefficienten, $= 6^0\ 17'$, der bedeutend grösser als der Coefficient jeder Störungsgleichung ist. Wir wollen daher in dem Folgenden statt der vorigen Kreisform diese elliptische der Rechnung zum Grunde legen und untersuchen, ob und was für neue Ungleichheiten bei dieser Hypothese zum Vorschein kommen; denn nur auf solche Weise können wir hoffen, die Formeln der Theorie mit den Beobachtungen in die zu wünschende Uebereinstimmung zu bringen.

§. 118.

Bezeichnet e die Excentricität der Mondsbahn und α die mittlere Anomalie des Mondes, so wird sein elliptischer Ort, mit Weglassung der zweiten und höheren Potenzen von e, durch

$$r = a\,(1 - e \cos \alpha) \text{ und } l = \lambda + 2e \sin \alpha$$

bestimmt. Um daher die bei dem elliptischen Laufe des

Mondes statt habenden Störungen zu finden, wollen wir zunächst diese elliptischen Werthe von r und l in den mit w multiplicirten Gliedern von T und V substituiren. Denn damit werden T und V noch immer bis auf die erste Potenz von w genau und somit alle die Störungen zu liefern im Stande sein, welche w und ew, so wie $e'w$, zu Factoren haben. Weil ferner das Glied mit dem Factor $ee'w$, als einer höheren Ordnung angehörig, hier ausser Betracht bleibt (§. 100.), und wir daher auch jetzt mit Berücksichtigung von e' keine andern Glieder, als die schon in §§. 113. und 114. entwickelten, finden würden, so nehmen wir gegenwärtig für die Sonnencoordinaten r' und l' schlechthin ihre mittlern Werthe a' und λ' und schreiben demnach statt der in §. 99. für T_1 und V_1 aufgestellten Formeln:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{r}{a}w\,[1 + 3\cos 2\,(l - \lambda')],$$

$$V_1 = -\frac{3}{2}\frac{r}{a}w\sin 2\,(l - \lambda').$$

Nun ist mit Anwendung der elliptischen Werthe von r und l (vergl. §. 113.):

$$2\,(l - \lambda') = \lambda_1 + 4e\sin\alpha,\ \text{wo}\ \lambda_1 = 2\,(\lambda - \lambda'),$$

$$\cos 2\,(l - \lambda') = \cos\lambda_1 - 2e\cos(\lambda_1 - \alpha) + 2e\cos(\lambda_1 + \alpha),$$

$$\sin 2\,(l - \lambda') = \sin\lambda_1 - 2e\sin(\lambda_1 - \alpha) + 2e\sin(\lambda_1 + \alpha),$$

$$\frac{r}{a}\cos 2\,(l - \lambda') = \cos\lambda_1 - \frac{5}{2}e\cos(\lambda_1 - \alpha) + \frac{3}{2}e\cos(\lambda_1 + \alpha),$$

$$\frac{r}{a}\sin 2\,(l - \lambda') = \sin\lambda_1 - \frac{5}{2}e\sin(\lambda_1 - \alpha) + \frac{3}{2}e\sin(\lambda_1 + \alpha).$$

Hiermit wird

$$(1)\quad T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}ew\cos\alpha + \frac{3}{2}w\cos\lambda_1 - \frac{15}{4}ew\cos(\lambda_1 - \alpha) + \frac{9}{4}ew\cos(\lambda_1 + \alpha),$$

$$(2)\quad V_1 = -\frac{3}{2}w\sin\lambda_1 + \frac{15}{4}ew\sin(\lambda_1 - \alpha) - \frac{9}{4}ew\sin(\lambda_1 + \alpha).$$

Wir erkennen hieraus, dass r und l, bei Berücksichtigung der Excentricität der Mondsbahn, ausser den uns schon bekannten Gliedern, welche λ_1 zum Argument und w zum Factor haben, noch mit ew multiplicirte Störungsglieder erhalten, deren Argumente α, $\lambda_1 - \alpha$ und $\lambda_1 + \alpha$ sind. Indem

wir daher alle diese Glieder zu den elliptischen Werthen von r und l hinzufügen und den mittlern Werth von r um die Constante acw vergrössern (§. 105.), setzen wir:

$$(3)\ \frac{r}{a} = 1 - e\cos\alpha + cw + f_0 ew\cos\alpha + f_1 w\cos\lambda_1 + f_5 ew\cos(\lambda_1 - \alpha) + f_6 ew\cos(\lambda_1 + \alpha),$$

$$(4)\ l = \lambda + 2e\sin\alpha + g_0 ew\sin\alpha + g_1 w\sin\lambda_1 + g_5 ew\sin(\lambda_1 - \alpha) + g_6 ew\sin(\lambda_1 + \alpha),$$

und suchen nun die Zahlen c, f_0, g_0, ... so zu bestimmen, dass die aus (3) und (4) zu folgernden Kräfte mit (1) und (2) identisch werden. Hierzu sind aber die in §. 34. entwickelten und bisher benutzten Formeln nicht mehr ausreichend, weil jetzt nicht mehr, wie dort vorausgesetzt wurde, alle die zu den mittlern Werthen von r und l hinzugefügten Glieder so klein sind, dass ihre Producte in einander vernachlässigt werden können. Es ist nämlich r sowohl, als l, von der Form

$$A + Be + Cw + Dew,$$

und es kann daher das Product aus den Gliedern Be und Cw gegen das letzte Glied Dew nicht unbeachtet bleiben. Auch würde, weil nach der Annahme in §. 100. e von der ersten und w von der zweiten, also ew von der dritten Ordnung ist, noch das Quadrat und der Cubus von Be mit zu berücksichtigen sein. Da aber die Glieder ohne w zur rein elliptischen Bewegung gehören, und wir es hier nur mit der Entwickelung der von der Störung herrührenden und daher in w multiplicirten Glieder zu thun haben, so brauchen wir auf die höhern Potenzen von e keine Rücksicht zu nehmen.

Um, diesen Bemerkungen gemäss, zuerst das in (1) vorkommende Glied $-a^2 : r^2$ zu entwickeln, setzen wir

$$-e\cos\alpha + cw + f_0 ew\cos\alpha + f_1 w\cos\lambda_1 + \ldots = x$$

und damit

$$r : a = 1 + x.$$

Hieraus folgt, bis auf die zweite Potenz von x genau:

$$a^2 : r^2 = 1 - 2x + 3x^2.$$

Es ist aber mit Weglassung der zweiten Potenzen von e und w:

$$3x^2 = -6e\cos\alpha\,(cw + f_1 w\cos\lambda_1)$$
$$= -6cew\cos\alpha - 3f_1 ew\,[\cos(\lambda_1 - \alpha) + \cos(\lambda_1 + \alpha)],$$

folglich

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 + 2e\cos\alpha - 2cw - (6c + 2f_0)\,ew\cos\alpha - 2f_1 w\cos\lambda_1$$
$$-(3f_1 + 2f_5)\,ew\cos(\lambda_1 - \alpha) - (3f_1 + 2f_6)\,ew\cos(\lambda_1 + \alpha).$$

Dieses in (1) substituirt und der Kürze willen $\lambda_1 - \alpha = \lambda_5$ und $\lambda_1 + \alpha = \lambda_6$ gesetzt, erhalten wir:

$$(1^*)\quad T_1 = -1 + (2c + \tfrac{1}{2})\,w - 2e\cos\alpha + (6c + 2f_0 - \tfrac{1}{2})\,ew\cos\alpha$$
$$+ (2f_1 + \tfrac{3}{4})\,w\cos\lambda_1 + (3f_1 + 2f_5 - \tfrac{15}{4})\,ew\cos\lambda_5$$
$$+ (3f_1 + 2f_6 + \tfrac{9}{4})\,ew\cos\lambda_6,$$

$$(2^*)\quad V_1 = -\tfrac{3}{4}\,w\sin\lambda_1 + \tfrac{15}{4}\,ew\sin\lambda_5 - \tfrac{9}{4}\,ew\sin\lambda_6.$$

§. 119.

Wir haben nunmehr T_1 und V_1 aus den in (3) und (4) für r und l angenommenen Werthen herzuleiten. Da aus den angegebenen Gründen von der Methode in §. 112. hier kein Gebrauch gemacht werden kann, so wollen wir die allgemein gültigen Formeln (D) in §. 36. anwenden. Bedeuten demnach im jetzigen §., wie dort, r' und l' die Geschwindigkeiten von r und l, r'' und l'' die von r' und l', und setzen wir die constanten Geschwindigkeiten, mit denen sich die Argumente λ, α, λ_1, λ_5, λ_6 ändern, resp. $= n$, $k_0 n$, $k_1 n$, $k_5 n$, $k_6 n$, wobei noch zu bemerken, dass k_0 entweder $= 1$, oder von 1 doch nur sehr wenig verschieden ist. Denn bezeichnet ω die Länge des Perigäums des Mondes, so ist $\alpha = \lambda - \omega$ (§. 45.). In der elliptischen Theorie ist aber ω von constanter Länge, folglich die Geschwindigkeiten n und $k_0 n$ von λ und α einander gleich, folglich $k_0 = 1$. Sollte daher k_0 von 1 abweichen, also ω sich ändern, so könnte dieses nur in Folge der Störung geschehen, und es muss mithin der Unterschied zwischen k_0 und 1, wenn anders ein solcher statt findet, von gleicher Ordnung mit w sein; woraus noch folgt, dass in allen den

Gliedern, welche bereits w als Factor enthalten, k_0 geradezu $= 1$ gesetzt werden kann. — Es findet sich somit:

$$\frac{r'}{na} = k_0 e \sin\alpha - f_0 ew \sin\alpha - k_1 f_1 w \sin\lambda_1 - k_5 f_5 ew \sin\lambda_5 - k_6 f_6 ew \sin\lambda_6,$$

$$\frac{r''}{nna} = k_0^2 e \cos\alpha - f_0 ew \cos\alpha - k_1^2 f_1 w \cos\lambda_1 - k_5^2 f_5 ew \cos\lambda_5 - k_6^2 f_6 ew \cos\lambda_6,$$

$$\frac{l'}{n} = 1 + 2k_0 e \cos\alpha + g_0 ew \cos\alpha + k_1 g_1 w \cos\lambda_1 + k_5 g_5 ew \cos\lambda_5 + k_6 g_6 ew \cos\lambda_6,$$

$$\frac{l''}{nn} = - 2k_0^2 e \sin\alpha - g_0 ew \sin\alpha - k_1^2 g_1 w \sin\lambda_1 - \text{etc.}$$

Hieraus folgt weiter mit der Berücksichtigung, dass

$$\cos\alpha \cos\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\cos\lambda_5 + \tfrac{1}{2}\cos\lambda_6,$$
$$\sin\alpha \cos\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}\sin\lambda_5 + \tfrac{1}{2}\sin\lambda_6,$$
$$\cos\alpha \sin\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\sin\lambda_5 + \tfrac{1}{2}\sin\lambda_6 \text{ ist:}$$

$$\frac{l'^2}{nn} = 1 + 4k_0 e \cos\alpha + 2g_0 ew \cos\alpha + 2k_1 g_1 w \cos\lambda_1 + 2(k_1 g_1 + k_5 g_5)\, ew \cos\lambda_5 + 2(k_1 g_1 + k_6 g_6)\, ew \cos\lambda_6,$$

$$\frac{rl'^2}{nna} = 1 + cw + (4k_0 - 1)\, e\cos\alpha + (4c + f_0 + 2g_0)\, ew\cos\alpha + (f_1 + 2k_1 g_1)\, w\cos\lambda_1 + (f_5 + 2f_1 + k_1 g_1 + 2k_5 g_5)\, ew\cos\lambda_5 + (f_6 + 2f_1 + k_1 g_1 + 2k_6 g_6)\, ew\cos\lambda_6;$$ folglich

$$(5)\quad T_1 = \frac{r'' - rl'^2}{nna} = -1 - cw + F_0 e\cos\alpha + F_1 w\cos\lambda_1 + F_5 ew\cos\lambda_5 + F_6 ew\cos\lambda_6,$$

wo

$$F_0 = -4k^0 + 1 + k_0^2 - 2(2c + f_0 + g_0)\, w,$$
$$F_1 = -(1 + k_1^2) f_1 - 2k_1 g_1,$$
$$F_5 = -2f_1 - k_1 g_1 - (1 + k_5^2) f_5 - 2k_5 g_5,$$
$$F_6 = -2f_1 - k_1 g_1 - (1 + k_6^2) f_6 - 2k_6 g_6;$$

und nachdem man ähnlicherweise $\frac{rl''}{nna}$ und $\frac{r'l'}{nna}$ entwickelt hat:

$$(6)\quad V_1 = \frac{2r'l' + rl''}{nna} = G_0 e\sin\alpha + G_1 w\sin\lambda_1 + G_5 ew\sin\lambda_5 + G_6 ew\sin\lambda_6,$$

wo

$$G_0 = 2k_0 - 2f_0 w - 2k_0^2 - g_0 w - 2cw$$
$$G_1 = -2k_1 f_1 - k_1^2 g_1,$$
$$G_5 = -2k_5 f_5 - 2k_1 f_1 - k_1 g_1 - k_5^2 g_5 + \tfrac{1}{2}k_1^2 g_1 + f_1,$$
$$G_6 = -2k_6 f_6 - 2k_1 f_1 + k_1 g_1 - k_6^2 g_6 + \tfrac{1}{2}k_1^2 g_1 - f_1.$$

§. 120.

Um nun, was das Ziel unserer Aufgabe ist, die Werthe der Coefficienten in den Ausdrücken (3) und (4) für r und l zu bestimmen und uns überhaupt zu vergewissern, dass die für r und l angenommenen Formen die richtigen sind, müssen wir die jetzt auf doppelte Weise ausgedrückten Werthe von T_1 und V_1 in Bezug auf die einzelnen Argumente α, λ_1, λ_5, λ_6 mit einander vergleichen.

Es giebt aber die Vergleichung der zwei Werthe von T_1 in (1*) und (5):

$$[1]\quad -c = 2c + \tfrac{1}{2},$$
$$[2]\quad F_0 = -2 + (6c + 2f_0 - \tfrac{1}{2})\,w,$$
$$[3]\quad F_1 = 2f_1 + \tfrac{3}{4},$$
$$[4]\quad F_5 = 3f_1 + 2f_5 - \tfrac{15}{4},$$
$$[5]\quad F_6 = 3f_1 + 2f_6 + \tfrac{9}{4};$$

und die Vergleichung der zwei Werthe von V_1 in (2*) und (6):

$$[6]\quad G_0 = 0, \qquad [8]\quad G_5 = \tfrac{15}{4},$$
$$[7]\quad G_1 = -\tfrac{3}{2}, \qquad [9]\quad G_6 = -\tfrac{9}{4}.$$

Aus der ersten dieser neun Gleichungen folgt $c = -\frac{1}{6}$, wie schon früher gefunden worden. Von den acht übrigen Gleichungen, in denen man sich für F_0, ... G_0, ... ihre Werthe aus dem vorigen §. substituirt denken muss, geben [3] und [7] die schon in §. 105. entwickelten Coefficienten f_1 und g_1 der Variation. Die Gleichungen [2] und [6] werden im folgenden Kapitel näher betrachtet werden. Für jetzt wollen wir aus den noch übrigen vier Gleichungen die Coefficienten der Argumente λ_5 und λ_6 zu bestimmen suchen. Dieses ist aber ganz leicht; denn es werden nach der eben gedachten Substitution, und wenn man die Zahlen

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{15}{4} - 5f_1 - k_1 g_1 &= p_5, \\ -\tfrac{15}{4} + f_1 - 2k_1 f_1 - k_1 g_1 + \tfrac{1}{2}k_1^2 g_1 &= q_5, \\ -\tfrac{9}{4} - 5f_1 - k_1 g_1 &= p_6, \\ \tfrac{9}{4} - f_1 - 2k_1 f_1 + k_1 g_1 + \tfrac{1}{2}k_1^2 g_1 &= q_6 \end{aligned}\right\}\ (M)$$

setzt, die Gleichungen

$$[4] \ldots (3 + k_5^2) f_5 + 2k_5 g_5 = p_5,$$
$$[8] \ldots 2k_5 f_5 + k_5^2 g_5 = q_5,$$
$$[5] \ldots (3 + k_6^2) f_6 + 2k_6 g_6 = p_6,$$
$$[9] \ldots 2k_6 f_6 + k_6^2 g_6 = q_6.$$

Aus den zwei ersten derselben ergeben sich:

$$f_5 = -\frac{k_5 p_5 - 2q_5}{k_5(1 - k_5^2)}, \quad g_5 = \frac{2k_5 p_5 - (3 + k_5^2) q_5}{k_5^2 (1 - k_5^2)},$$

und aus den zwei letzten: (N)

$$f_6 = -\frac{k_6 p_6 - 2q_6}{k_6(1 - k_6^2)}, \quad g_6 = \frac{2k_6 p_6 - (3 + k_6^2) q_6}{k_6^2 (1 - k_6^2)}.$$

§. 121.

Um nach den jetzt erhaltenen Formeln die Werthe von f_5, g_5, f_6, g_6 numerisch zu bestimmen, haben wir die Zahlenwerthe von f_1, g_1, k_1, k_5, k_6 zu wissen nöthig. Von diesen sind die drei ersten schon in §. 106. berechnet worden, nämlich:

$$f_1 = -1,2876, \quad g_1 = 1,8297, \quad k_1 = 1,8504.$$

Da ferner $\lambda_5 = \lambda_1 - \alpha$, $\lambda_6 = \lambda_1 + \alpha$, und hier $k_0 = 1$ ist, so haben wir

$$k_5 = k_1 - 1 = 0,8504, \quad k_6 = k_1 + 1 = 2,8504.$$

Hiermit finden sich nach (M) die Zahlen

$$p_5 = 6,8023, \quad p_6 = p_5 - 6 = 0,8023,$$
$$q_5 = -0,5257, \quad q_6 = 14,8209.$$

Mit diesen Werthen für k, p, q ergeben sich nach (N)

$$f_5 = -29,039, \quad f_6 = -1,3469,$$
$$g_5 = 67,568, \quad g_6 = 2,7692.$$

Nun ist die Excentricität der Mondsbahn

$$e = 0,054844$$

und $w = 0,0055952$, $= 1154'', 1$ (§. 106.); folglich

$$f_5 ew = -0,008911, \quad f_6 ew = -0,000413$$
$$g_5 ew = 1^0\, 11'\, 17'', \quad g_6 ew = 2'\, 55''.$$

Mit Berücksichtigung der Excentricität der Mondsbahn erhalten wir demnach zu den bereits gefundenen folgende neue Störungsgleichungen

für die Länge: $+ 1^0\, 11'\, 17'' \sin \lambda_5 + 2'\, 55'' \sin \lambda_6$,

für den Radius V.: $-0,008911 \cos \lambda_5 - 0,000413 \cos \lambda_6$.

Endlich ist, um die Parallaxe zu bestimmen:

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1+x} \text{ (§. 118.)} = 1 - x + x^2.$$

Es ist aber, wenn wir in x und x^2 bloss die Glieder, deren Argumente λ_5 und λ_6 sind, berücksichtigen:

$$x = f_5 ew \cos\lambda_5 + f_6 ew \cos\lambda_6,$$
$$x^2 = -f_1 ew \cos\lambda_5 - f_1 ew \cos\lambda_6 \text{ (ebends.).}$$

Die hierher gehörigen Gleichungen der Parallaxe sind demnach:

$$-57'\,1''.\,ew\,[(f_5 + f_1)\cos\lambda_5 + (f_6 + f_1)\cos\lambda_6]$$
$$= +31'',9\cos\lambda_5 + 2'',8\cos\lambda_6,$$

wo $\lambda_5 = 2(\lambda - \lambda') - \alpha$ und $\lambda_6 = 2(\lambda - \lambda') + \alpha$.

Bei Damoiseau sind die Coefficienten dieser Gleichungen

für die Länge: $+1^0\,16''\,28'',2$, $+3'\,12'',2$,
für die Parallaxe: $+34'',4$, $+3'',1$.

§. 122.

Die grösste unter den somit gefundenen Gleichungen, so wie unter allen Störungsgleichungen überhaupt, ist die Gleichung für die Länge, welche $2(\lambda - \lambda') - \alpha$, d. i. das Doppelte der mittlern Winkelentfernung des Mondes von der Sonne, vermindert um die mittlere Anomalie des Mondes, zum Argumente hat. Sie wird die Evection genannt und kann die Länge des Mondes bis auf $1^0\,16'\,28''$ (nach *D.*) ändern.

Im Neu- und Vollmonde ist $2(\lambda - \lambda') = 0$ und 360^0, folglich $\sin\lambda_5 = -\sin\alpha$, und die Evection $= -1^0\,16'\sin\alpha$. Letztere vermengt sich daher in den Syzygien mit der Mittelpunktsgleichung $= 6^0\,17'\sin\alpha$, die dadurch $5^0\,1'\sin\alpha$, also um den ganzen Werth der Evection kleiner wird. In den Quadraturen dagegen, wo $2(\lambda - \lambda') = 180^0$ und $360^0 + 180^0$, wird die Evection $= +1^0\,16'\sin\alpha$, und die Mittelpunktsgleichung scheint dadurch in $7^0\,33'\sin\alpha$ übergegangen, also um die ganze Evection vergrössert zu sein.

In den frühesten Zeiten bestimmten die Astronomen den Mondlauf nur aus Finsternissen, also aus Beobachtungen

von Neu- und Vollmonden, und fanden hiernach die Mittelpunktsgleichung um den ganzen Betrag der Evection zu klein. Hipparch, Astronom der alexandrin'schen Schule im zweiten Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung, scheint der erste gewesen zu sein, welcher den Mond auch in den Quadraturen beobachtete und dabei grosse Abweichungen von der bis dahin angenommenen Theorie fand. Ptolemäus, Astronom derselben Schule im zweiten Jahrhunderte nach Christus, bestimmte das Gesetz und die Grösse dieser Abweichungen und ward dadurch der Entdecker der Evection.

§. 123.

So wie die Evection die grösste unter den Störungsgleichungen der Länge ist, so zeichnet sich auch die Gleichung des Radius Vector, welche mit der Evection dasselbe Argument hat, als die grösste unter den Gleichungen des Radius aus. Die Wirkung, welche diese beiden Gleichungen in Vereinigung hervorbringen, lässt sich, wie ich noch zeigen will, durch eine nach einem sehr einfachen Gesetz erfolgende Aenderung der Form und Lage der Mondsellipse vorstellig machen. — Weil $\alpha = \lambda - \omega$, so ist das Argument $2(\lambda - \lambda') - \alpha = \lambda - (2\lambda' - \omega)$. Nun hat $2\lambda' - \omega$, welches wir $= \omega_{,}$ setzen wollen, im Vergleich mit λ eine nicht sehr beträchtliche Geschwindigkeit. Es ist ferner nach unserer Rechnung das Verhältniss $g_5 : f_5 = -2,33 : 1$, also nicht sehr vom Verhältnisse $-2 : 1$ verschieden; um eben so viel nach Damoisean, wo $f_5 ew = -\frac{32'',8}{57'\,1''} = -\frac{1}{104,3}$ und $g_5 ew = 1^0\,16'\,28'',2 \,.\, \sin 1'' = \frac{1}{45,0}$, also $g_5 : f_5 = -2,32 : 1$ ist. Setzen wir daher $g_5 ew = 2e_{,}$, so ist nahe $f_5 ew = -e_{,}$, und die zwei in Rede stehenden Gleichungen der Länge und des Radius werden

$$2e_{,} \sin(\lambda - \omega_{,}) \text{ und } -e_{,} \cos(\lambda - \omega_{,}),$$

also von derselben Form, wie bei einer rein elliptischen Bewegung, wo die Excentricität $= e_{,}$ und die Länge des Perigäums $= \omega_{,}$ ist.

Abgesehen von allen übrigen Störungen, ist demnach

$$r : a_{,} = 1 - e\cos(\lambda - \omega) - e_{,}\cos(\lambda - \omega_{,})$$
$$l = \lambda + 2e\sin(\lambda - \omega) + 2e_{,}\sin(\lambda - \omega_{,});$$

d. h. zu der elliptischen Ungleichheit, welche e zur Excentricität und ω zur Länge des Perigäums hat, tritt wegen der Evection eine zweite hinzu, deren Elemente $e_{,,} = \frac{1}{90} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{5}e$, und $\omega_{,,} = 2\lambda' - \omega$, sind.

Diese zwei elliptischen Ungleichheiten lassen sich aber leicht zu einer einzigen verbinden. Denn löst man die Cosinus und Sinus auf bekannte Weise auf und setzt alsdann

$$(\alpha) \begin{cases} e\cos\omega + e_{,}\cos\omega_{,} = E\cos\Omega, \\ e\sin\omega + e_{,}\sin\omega_{,} = E\sin\Omega, \end{cases}$$ so wird

$$r : a_{,} = 1 - E\cos(\lambda - \Omega) \text{ und } l = \lambda + 2E\sin(\lambda - \Omega).$$

Die Evection in Verbindung mit der ursprünglichen durch e und ω bestimmten elliptischen Bewegung des Mondes erzeugt daher wiederum eine elliptische Bewegung, welche durch E und Ω bestimmt ist, nur dass letztere zwei Elemente sich ziemlich schnell und ungleichförmig ändern, während e constant ist, und ω, wie das folgende Kapitel lehren wird, langsam und der Zeit proportional zunimmt.

§. 124.

Das durch die Formeln (α) ausgedrückte Gesetz der Aenderung von E und Ω lässt sich leicht graphisch veranschaulichen. Sei in T (Fig. 39.) die Erde, TX die in der Ebene der Bewegung gezogene feste Linie, von welcher an die Längen gerechnet werden, und c der Mittelpunkt der Ellipse, welche der Mond ohne den Einfluss der Evection um T beschreibt, so ist $XTc = 180^0 + \omega$ und, wenn man $a_{,} = 1$ setzt, $Tc = e$. Sei ferner $TX \wedge cC = 180^0 + \omega_{,}$ und $cC = e_{,}$, so ist, wenn man die Seiten des Dreiecks TcC das einemal auf TX, das anderemal auf eine die TX rechtwinklig schneidende Linie projicirt:

$$TC\cos XTC = -e\cos\omega - e_{,}\cos\omega_{,} = -E\cos\Omega,$$
$$TC\sin XTC = -e\sin\omega - e_{,}\sin\omega_{,} = -E\sin\Omega,$$

folglich $TC = E$ und $XTC = 180^0 + \Omega$, folglich C der Mittelpunkt der durch die Evection geänderten Ellipse.

Es ist aber $cC = e_{,} = \frac{1}{5} e = \frac{1}{5} Tc$ und

$$Tc \wedge cC = TX \wedge cC - XTc = \omega_{,} - \omega = 2\,(\lambda' - \omega),$$

wegen $\omega_{,} = 2\lambda' - \omega$; und wir schliessen daher:

Die Ellipse, welche der Mond um die in dem einen ihrer Brennpunkte befindliche Erde T beschreibt, erscheint durch die Wirkung der Evection ihrer Form und Lage nach dergestalt veränderlich, dass ihr Mittelpunkt C um den Mittelpunkt c der Ellipse, welche ohne den Einfluss der Evection statt haben würde, in einer Entfernung $cC = \frac{1}{5} Tc$ einen Kreis beschreibt, und dieses auf solche Weise, dass der Winkel, welchen cC mit Tc macht, stets doppelt so gross als der Winkel $(\lambda' - \omega)$ des Radius Vector der Sonne mit Tc ist, und dass daher in Bezug auf Tc der Kreis während jedes Sonnenumlaufs zweimal von C beschrieben wird.

Um die vorzüglichern Fälle, welche hiernach während eines Sonnenumlaufs eintreten können, näher zu betrachten, nenne man C_0 den Punkt, in welchem von der über c hinaus verlängerten Linie Tc der gedachte Kreis geschnitten wird, und theile letztern von C_0 aus nach der Linken herum in den Punkten C_1, C_2, C_3 in vier gleiche Theile. Heisse überdies S der Ort der Sonne, so ist allgemein $C_0 cC = 2cTS$. Wenn daher

1) $cTS = 0$ oder $= 180^0$, wenn also S in der Apsidenlinie des Mondes Tc steht, und folglich die Zeiten der Erdnähe und Erdferne des Mondes mit den Zeiten der Syzygien zusammenfallen, so ist C in C_0. Die Excentricität TC hat dann folglich ihren grössten Werth $= TC_0 = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{15}$, und die Apsidenlinie hat ihre mittlere Lage Tc. Ist aber

2) $cTS = 90^0$ oder $= 270^0$, also TS auf Tc perpendikular, und fallen mithin die Zeiten der Erdnähe und der Erdferne in die Zeiten der Quadraturen, so ist C_2 der Ort von C, also die Excentricität am kleinsten, $= TC_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{22,5}$, und die Apsidenlinie ist abermals in ihrer mittlern Lage.

3) Wenn cTS dem 1, 3, 5 oder 7fachen von 45^0 gleich wird, also zu den Zeiten, wo die Erdnähe und Erdferne in

die Mitte zwischen die Syzygien und Quadraturen fallen, so ist C abwechselnd in C_1 und C_3. Die Excentricität, $= TC_1 = TC_3$, hat alsdann, nahe wenigstens, ihren mittlern Werth $= \frac{1}{18}$, die Apsidenlinie aber ist von ihrer mittlern Lage Tc nach der einen oder andern Seite am weitesten entfernt. — Von dem Winkel, bis zu welchem sie sich von Tc entfernen kann, ist der Sinus $= cC : Tc = \frac{1}{5}$, und daher der Winkel selbst $= 11\frac{1}{2}^0$.

Noch folgt aus der rechtläufigen Kreisbewegung von C, dass, wenn die Excentricität am grössten (kleinsten) ist, die Apsidenlinie am schnellsten vorwärts (rückwärts) geht, und dass, wenn die Apsidenlinie sich von ihrer mittlern Lage am weitesten vorwärts (rückwärts) entfernt hat, die Excentricität am schnellsten abnimmt (zunimmt).

Mit diesem periodischen Vor- und Rückwärtsgehen der Apsidenlinie ist noch das sogleich näher zu behandelnde gleichförmige Vorrücken derselben zu verbinden, welches in einem siderischen Monate $3^0\ 3'$ beträgt, und wodurch es geschieht, dass in Bezug auf Tc die Sonne ihren Umlauf erst in 411, 78 Tagen vollendet, und folglich der Punkt C seinen Kreis in 205, 89 Tagen, also in einem siderischen Monat einen Bogen von $47^0, 77$ beschreibt. Von T aus gesehen, erscheint dieser Bogen, wenn C_0 seine Mitte ist, unter einem Winkel von $7\frac{3}{4}^0$, und, wenn C_2 seine Mitte ist, unter einem Winkel von 11^0. In Bezug auf Tc beträgt daher das Vorwärtsgehen der Linie TC, wenn es am schnellsten ist, in einem siderischen Monate $7\frac{3}{4}^0$, und das schnellste Rückwärtsgehen während desselben Zeitraums 11^0. Da aber in dieser Zeit die Linie Tc um 3^0 unter den Sternen vorrückt, so beträgt in Bezug auf die Sterne die grösste rechtläufige Bewegung der Apsiden $10\frac{3}{4}^0$, und 103 Tage später die grösste rückläufige Bewegung 8^0 in einem siderischen Monate.

Sechstes Kapitel.

Von dem Vorwärtsgehen der Apsiden der Mondsbahn.

§. 125.

Als wir im vorigen Kapitel, die Excentricität der Mondsbahn berücksichtigend, die elliptischen Werthe von r und l in die mit w multiplicirten Glieder von T_1 und V_1 substituirten, gab uns die Analyse das Vorhandensein von drei neuen Ungleichheiten, deren Argumente α, $2(\lambda - \lambda') - \alpha$ und $2(\lambda - \lambda') + \alpha$ waren, zu erkennen. Von diesen Ungleichheiten haben wir bis jetzt bloss die den zwei letztern Argumenten zugehörigen in Untersuchung genommen und ihre Coefficienten berechnet. Es bleibt uns daher noch übrig, die Coefficienten f_0 und g_0 der Glieder, welche α oder die mittlere Anomalie des Mondes selbst zum Argumente haben, zu bestimmen.

Die hierzu dienenden Gleichungen sind [2] und [6] in §. 120. Sie werden, nachdem man in ihnen für F_0 und G_0 ihre Werthe aus §. 119. substituirt und $c = -\frac{1}{6}$ gesetzt hat:

$$[2] \quad -4k_0 + 3 + k_0^2 - (4f_0 + 2g_0 - \tfrac{13}{6})\, w = 0$$

$$[6] \quad 2k_0 - 2k_0^2 - (2f_0 + g_0 - \tfrac{1}{3})\, w = 0.$$

Hieraus lassen sich aber f_0 und g_0 nicht einzeln, sondern nur das Aggregat $2f_0 + g_0$, welches h heisse, bestimmen. Dass dieses so kommen musste, hätte man auch leicht vorhersehen können. Man setze zu dem Ende

$$e - f_0 ew = e_, \text{ und } 2e + g_0 ew = 2e_{,,},$$

wodurch die Gleichungen (3) und (4) in §. 118.:

$$r : a = 1 - e_, \cos\alpha + \ldots \text{ und } l = \lambda + 2e_{,,} \sin\alpha + \ldots$$

werden. Den Gliedern $-e\cos\alpha$ und $2e\sin\alpha$ in den Formeln für r und l die Glieder $f_0 ew \cos\alpha$ und $g_0 ew \sin\alpha$ hinzufügen, ist daher eben so viel, als eine andere Excentricität $e_,$ zur Berechnung von r, eine andere $e_{,,}$ zur Be-

rechnung von l anwenden. Durch die Theorie der Störungen kann aber nichts weiter, als der Unterschied zwischen diesen Excentricitäten, welcher

$$e_{,,} - e_{,} = (f_0 + \tfrac{1}{2} g_0)\, ew = \tfrac{1}{2} hew$$

ist, ermittelt werden. — Mit andern Worten: in den Formeln für r und l ist der zu bestimmenden Constanten eine zu viel (e, f_0, g_0 statt $e_{,}$, $e_{,,}$) angenommen worden, und es kann folglich eine der Zahlen f_0 und g_0 nach Belieben bestimmt werden, z. B. $f_0 = 0$, wodurch die beiden Excentricitäten $= e$ und $= e + \frac{1}{2} g_0 ew$ werden, und wo daher $\frac{1}{2} g_0 ew$ ihr zu ermittelnder Unterschied ist.

Was ferner die in den Gleichungen [2] und [6] noch enthaltene Zahl k_0 anlangt, so erhellet augenblicklich, dass diese nicht, wie bei der elliptischen Bewegung, der Einheit gleich sein kann, indem sich damit die Gleichungen auf die einander widersprechenden

$$-\left(2h - \tfrac{13}{6}\right) w = 0 \text{ und } \left(h - \tfrac{1}{3}\right) w = 0$$

reduciren würden. Mithin ist k_0 von 1 verschieden, und die zwei Gleichungen, aus denen wir anfangs f_0 und g_0 bestimmen zu können erwarteten, werden uns statt dessen zur Bestimmung des Aggregats von $2f_0 + g_0$ oder h und der Differenz $k_0 - 1$ dienen.

In der That, setzt man letztere, weil sie nur von der Störung herrührt, $= pw$, also $k_0 = 1 + pw$, so wird

$$-4k_0 + 3 + k_0^2 = -2pw \text{ und } 2k_0 - 2k_0^2 = -2pw,$$

und die Gleichungen [2] und [6] gehen damit über in

$$[2^*] \quad -\left(2p + 2h - \tfrac{13}{6}\right) w = 0,$$
$$[6^*] \quad -\left(2p + h - \tfrac{1}{3}\right) w = 0,$$

woraus $h = \frac{11}{6}$ und $p = -\frac{3}{4}$, also

$$e_{,,} = e_{,} \left(1 + \tfrac{11}{12} w\right) \text{ und } k_0 = 1 - \tfrac{3}{4} w \text{ folgt.}$$

Es ist aber $\omega = \lambda - \alpha$, und daher die Geschwindigkeit des Winkels ω oder der Apsidenlinie = der Geschwindigkeit von $\lambda - \alpha$, $= n - k_0 n = \frac{3}{4} nw$. Die Apsiden haben demnach eine gleichförmige und positive, d. i. vorwärtsgehende, Bewegung und ihre Umlaufszeit ist

13*

$$= 360^0 : \tfrac{3}{4} nw = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{360^0}{n} \cdot \tfrac{n^2}{n'^2} \text{ (§. 99.)} = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{n}{n'} \cdot \tfrac{360^0}{n'}$$

$$= \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{n}{n'} \text{ siderischen Jahren} = 17,825 \text{ siderischen Jahren},$$

weil $\frac{360^0}{n'}$ die siderische Umlaufszeit der Sonne und $\frac{n}{n'} = 13,369$ (§. 100.) ist.

§. 126.

Abgesehen von den Ungleichheiten, welche vom scheinbaren Stande des Mondes gegen die Sonne oder dem Winkel $\lambda - \lambda'$ abhängen, ist nach vorigem §. und nach §. 118.:

$$r = a\,(1 - \tfrac{1}{6} w - e_, \cos\alpha),$$
$$l = \lambda + 2e_, (1 + \tfrac{11}{12} w) \sin\alpha;$$

oder, wenn man $e_, = e_0 (1 - \frac{1}{6} w)$, und damit $e_, (1 + \frac{11}{12} w) = e_0 (1 - \frac{1}{6} w)(1 + \frac{11}{12} w) = e_0 (1 + \frac{3}{4} w)$ setzt:

$$(a) \quad r = a\,(1 - \tfrac{1}{6} w)(1 - e_0 \cos\alpha)$$
$$l = \lambda + 2e_0 (1 + \tfrac{3}{4} w) \sin\alpha;$$

wozu noch, wegen der Excentricität der Sonnenbahn, die wir aber jetzt unberücksichtigt lassen, in r sowohl, als in l, ein Glied mit dem Argumente α' hinzutritt (§. 114.). So wie jene Ungleichheiten in den vom Winkel $l - l'$ abhängigen Theilen der störenden Kraft ihren Ursprung haben, so sind die mit w multiplicirten Glieder, welche in den jetzt hingeschriebenen Ausdrücken für r und l vorkommen, aus dem von jenem Winkel freien Theile der Kraft, dem Gliede $\frac{1}{2} \frac{r}{a} \cdot \frac{a'^3}{r'^3} w$ in T_1 (§. 99.), entstanden.

Der von der gegenseitigen Stellung der Sonne und des Mondes unabhängige Theil der störenden Kraft bewirkt demnach: erstens eine Verringerung, in dem Verhältnisse von 1 zu $1 - \frac{1}{6} w$, der mittlern Entfernung a des Mondes, welche aus seiner mittlern Bewegung n folgt; zweitens eine Verschiedenheit, $= \frac{3}{2} e_0 w$, der Excentricitäten, mit denen der Radius Vector und die Länge des Mondes zu berechnen sind, und drittens ein mit der Geschwindigkeit $\frac{3}{4} nw$ erfolgendes Vorrücken der Apsiden der Mondsbahn.

Es lassen sich aber die zwei letztern Wirkungen auf eigenthümliche Art vereinigt darstellen. Weil nämlich $\lambda = \varepsilon + nt$ (§. 45.) und $k_0 = 1 - \frac{3}{4} w$ ist, so wird

$$(b) \quad l = \varepsilon + \frac{1}{k_0} [k_0 nt + 2e_0 \sin \alpha].$$

Nun ist $k_0 n$ die Geschwindigkeit von α (§. 119.), und es wird folglich durch die Gleichungen (a) und

$$(c) \quad l_0 = \varepsilon + k_0 nt + 2e_0 \sin \alpha$$

eine rein elliptische Bewegung dargestellt. Ersichtlich stehen aber die Geschwindigkeiten, mit denen sich l und l_0 ändern, in dem constanten Verhältnisse $1 : k_0$. Die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten von λ und α oder die gleichförmige Drehung der Apsidenlinie und die Verschiedenheit der Excentricitäten für r und l in der rein elliptischen Bewegung können wir uns daher mit einem Male dadurch erzeugt denken, dass bei der durch (a) und (c) ausgedrückten elliptischen Bewegung die Winkelgeschwindigkeit des Radius Vector in dem Verhältnisse $k_0 : 1, = 1 : 1 + \frac{3}{4} w$, vergrössert wird, und folglich in $l_0' + \frac{3}{4} w l_0'$ übergeht, wo l_0' die Winkelgeschwindigkeit bei der elliptischen Bewegung bezeichnet.

Wir können uns daher auch vorstellen, dass während der Mond nach den Formeln (a) und (c) elliptisch um die Erde läuft, die Ellipse selbst mit einer der Geschwindigkeit l_0' des Radius stets proportionalen Geschwindigkeit $\frac{3}{4} w l_0'$ nach derselben Richtung um die Erde gedreht wird.

§. 127.

Zusätze. *a.* Betrachten wir überhaupt zwei Körper A_0 und A, welche sich in einer Ebene um einen festen Punkt O derselben dergestalt bewegen, dass ihre Radien OA_0 und OA stets einander gleich sind und sich mit constanten Flächengeschwindigkeiten $\frac{1}{2} c_0$ und $\frac{1}{2} c$ um O drehen Sei r der gemeinschaftliche Werth der Radien, und l_0' und l' ihre Winkelgeschwindigkeiten, so ist (§. 35.)

$$(\alpha) \quad c_0 = rrl_0' \text{ und } c = rrl';$$

mithin stehen auch die Winkelgeschwindigkeiten in dem constanten Verhältnisse der Flächengeschwindigkeiten, welches

$= k_0 : 1$ gesetzt werde, und man kann sich die Bewegung des einen Körpers A aus der des andern A_0 dadurch entstehend denken, dass die Bahn, in welcher A_0 fortgeht, mit einer Winkelgeschwindigkeit um O gedreht wird, welche sich zu der von A_0 wie $1 - k_0$ zu k_0 verhält.

Heissen noch T_0 und T die Kräfte durch welche die Bewegungen von A_0 und A erzeugt werden; sie sind nach O gerichtet (§. 37.), und es ist (§. 36.)

$$T_0 = r'' - rl_0'^2 = r'' - \frac{c_0^2}{r^3}, \text{ wegen } (\alpha),$$

und eben so $T = r'' - \frac{c^2}{r^3}$, folglich

$$(A) \quad T - T_0 = -\frac{c^2 - c_0^2}{r^3}.$$

„Bewegt sich demnach ein Körper A_0 in einer Ebene „um einen festen Punkt O derselben mit constanter Flächen„geschwindigkeit, und wird aus dieser Bewegung eine zweite „hergeleitet, indem man, während A_0 in seiner Bahn fort„geht, die Bahn selbst mit einer Winkelgeschwindigkeit, „welche der von A_0 proportional ist, um O sich drehen „lässt, so ist von den zwei Kräften, durch welche diese „zwei Bewegungen von A_0 hervorgebracht werden, und welche „beide nach O gerichtet sind, der Unterschied umgekehrt „dem Würfel des Radius OA_0 proportional.“ — Princ. philos. nat., lib. I. propos. 44.

b. Man sieht leicht, dass sich mit Hülfe der Relation (A) die Bewegung der Mondsapsiden gleichfalls ermitteln lassen muss. Es ist nämlich bei der wirklichen Mondsbahn, also bei der sich drehenden Ellipse (voriger §.), die doppelte Flächengeschwindigkeit $c = na_,^2$ *); dagegen ist bei der ruhenden Ellipse, $c_0 = k_0 c = k_0 na_,^2$, und die zur Bewegung in dieser Ellipse nöthige Kraft $T_0 = -k_0^2 n^2 a_,^3 : r^2$ (§. 55.).

*) Eigentlich $c = na_,^2 \sqrt{\frac{p}{a_,}}$ (§. 52.). Der Factor $\sqrt{\frac{p}{a_,}}$ kann aber hier weggelassen werden, weil er von der Einheit nur um $\frac{1}{4}e^2$ unterschieden ist (§. 49.).

Hieraus folgt nach (A) die Kraft bei der sich drehenden Ellipse, also die den Mond treibende Kraft

$$T = -\frac{k_0^2 n^2 a_{,}^3}{r^2} + (k_0^2 - 1)\frac{n^2 a_{,}^4}{r^3},$$

oder, wenn wie vorhin $k_0 = 1 + pw$ gesetzt wird:

$$T = -(1 + 2pw)\frac{n^2 a_{,}^3}{r^2} + 2pw\frac{n^2 a_{,}^4}{r^3}.$$

Dieselbe Kraft ist aber nach §. 99.:

$$T = -\frac{K(M + m)}{r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{Km'r}{a'^3},$$

oder, weil $\frac{m'}{M + m} = \frac{n'^3}{a_{,}^3} w$ ist (ebendaselbst):

$$T = -K(M + m)\left(\frac{1}{r^2} - \tfrac{1}{2}\frac{r}{a_{,}^3} w\right).$$

Dies giebt die Gleichung:

$$(a)\quad n^2 a_{,}^3\left[1 + 2pw\left(1 - \frac{a_{,}}{r}\right)\right] = K(M + m)\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{r^3}{a_{,}^3} w\right),$$

welche unabhängig von einem bestimmten Werthe von r bestehen muss. Für $r = a_{,}$ wird sie:

$$(b)\quad n^2 a_{,}^3 = K(M + m)(1 - \tfrac{1}{2} w),$$

was mit dem schon in §. 102. Bemerkten übereinstimmt.

Man dividire nun (a) durch (b), so findet sich

$$1 + 2pw\left(1 - \frac{a_{,}}{r}\right) = 1 + \tfrac{1}{2} w\left(1 - \frac{r^3}{a_{,}^3}\right)$$

und hieraus

$$p = -\tfrac{1}{4}\frac{r}{a_{,}^3}\cdot\frac{r^3 - a_{,}^3}{r - a_{,}} = -\tfrac{1}{4}\frac{r^3 + a_{,}r^2 + a_{,}^2 r}{a_{,}^3},$$

oder, weil die Bewegung nahe kreisförmig, und daher nahe $r = a_{,}$ ist: $p = -\tfrac{3}{4}$, woraus das Uebrige, wie in §. 125., fliesst.

Es ist dieses eine ungefähre Angabe des höchst sinnreichen Verfahrens, durch welches Newton die Bewegung der Apsiden zu bestimmen gesucht hat. Princ. lib. I. sect. IX.

---

§. 128.

Die vorwärtsgehende Bewegung der Mondsapsiden ist eine schon seit den ältesten Zeiten beobachtete Thatsache.

Digitized by Google

Allein merkwürdiger Weise ist die aus den Beobachtungen folgende Umlaufszeit der Apsiden nur von 8,850 siderischen Iahren, also nahe nur halb so gross, als diejenige, welche sich uns im Vorigen ergab, und welche auch Newton und späterhin die zu ihrer Zeit ausgezeichnetsten Geometer Clairaut, Euler und d'Alembert fanden, als sie diesen Gegenstand theoretisch zu untersuchen anfingen. Clairaut, der erste, welcher (im Jahre 1743) die Mondsstörungen mit Hülfe der Analysis zu entwickeln unternahm, wurde durch diesen so auffallenden Unterschied zwischen der Theorie und den Beobachtungen zu der Vermuthung geleitet, dass das Gesetz der Anziehung nicht so einfach sei, als man es seit Newton angenommen habe, und dass in seinem Ausdrucke dem Gliede, welches dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, ein zweites hinzugefügt werden müsse, welches, nur für die Bewegung der Apsiden von beträchtlicher Wirkung, auf die übrigen Ungleichheiten des Mondes und auf die Bewegungen der Planeten keinen merkbaren Einfluss habe. Als er aber, um dieses Glied näher zu bestimmen, alle Rechnungen mit noch grösserer Schärfe, als früher, von Neuem unternahm, machte er die wichtige Entdeckung, dass, wenn nur die Entwickelung weit genug fortgesetzt wird, und Grössen nicht vernachlässigt werden, die man wegen ihrer Kleinheit anfangs fast für einflusslos zu halten geneigt ist, die Apsidenbewegung des Mondes sich eben so gross als in der Natur findet.

Von dieser schärfern Rechnung werden die folgenden §§. einen ungefähren Begriff zu geben suchen.

§. 129.

Die durch die bisherige Rechnung gefundenen Werthe der Coordinaten r und t sind bis auf die erste Potenz des Störungscoefficienten w, und damit bis zu den Störungsgliedern der dritten Ordnung (§. 100.), richtig. Um diese Werthe zu erhalten, fingen wir damit an, in den mit w multiplicirten Gliedern von T_1 und V_1, oder in P und Q, wenn

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + wP \text{ und } V_1 = wQ$$

gesetzt wird, für r, l, r', l', wovon P und Q Functionen sind, die bis zur ersten Ordnung richtigen Werthe dieser Coordinaten, also ihre bis zur ersten Potenz der Excentricitäten e und e' richtigen Werthe zu substituiren. Denn somit erhielten T_1 und V_1 selbst eine bis zu ew und $e'w$, also bis zur dritten Ordnung gehende Genauigkeit.

So wie nun auf solche Weise aus den bloss bis zur ersten Ordnung richtigen Werthen von r und l ihre bis zur dritten Ordnung richtigen Werthe gefunden wurden, so wird man durch Wiederholung desselben Verfahrens mit letztern Werthen von r nnd l und mit den bis zur dritten Ordnung genauen Werthen von r' und l', indem man nämlich dieselben in P und Q substituirt, eine bis zur fünften Ordnung gehende Genauigkeit erreichen.

Ehe man aber diese Substitution unternimmt, müssen P und Q selbst genauer, als in §. 99. geschehen, nämlich bis zur dritten Ordnung genau, entwickelt werden. Zu den dort erhaltenen Werthen von P und Q muss deshalb erstens ein aus der weitern Entwickelung von ϱ entstehendes, mit $\frac{a}{a'}$, $= \frac{1}{399}$, multiplicirtes Glied, und zweitens wegen des Factors $\cos b'$ in T, V und ϱ (§. 96.) ein mit ι^2, $= \frac{1}{127}$, multiplicirtes Glied hinzukommen; denn $\frac{a}{a'}$ nnd ι^2 sind als Grössen der zweiten Ordnung zu betrachten. Endlich müssen bei der Substitution von r, l, r', l' in P und Q, von den elliptischen Theilen dieser Coordinaten, d. i. von den nach den Potenzen der Excentricitäten geordneten Reihen, welche r, l, etc. durch die mittlern Anomalieen ausdrücken (§. 51.), noch die Glieder der zweiten und dritten Ordnung berücksichtigt werden.

Schon diese Substitutionen und Entwickelungen machen, wie man sieht, eine etwas lange Rechnung nothwendig. Allein noch viel weitläufiger und verwickelter ist die Rechnung, welche erfordert wird, um aus den somit bis znr fünften Ordnung genau bestimmten Werthen von wP und wQ die bis zu derselben Ordnung, also bis zur zweiten Potenz von w, genauen Werthe von r und l selbst herzuleiten. Gleichwohl

kann eine so weit und wohl noch weiter fortgesetzte Rechnung nicht abgewiesen werden, wenn das endliche Ziel derselben, eine mit den Beobachtungen gleichen Schritt haltende Genauigkeit, erreicht werden soll.

Eine besondere Schwierigkeit erwächst diesen Rechnungen noch durch den Umstand, dass zwar im Allgemeinen der Coefficient eines Störungsgliedes desto kleiner ist, je höher die Ordnung ist, zu welcher er seinem analytischen Ausdrucke nach gehört, dass aber diese Regel nicht selten Ausnahmen erleidet, und man daher bei der Beurtheilung der wegen ihrer hohen Ordnung wegzulassenden Glieder mit grösster Vorsicht zu Werke gehen muss.

Ein Beispiel von einer solchen Ausnahme giebt uns schon die im Vorigen entwickelte Evection. Denn der Coefficient derselben, den wir $= 1^0\ 11'\ 17''$ fanden, gehört wegen seines Factors ew zur dritten Ordnung, ist aber nahe doppelt so gross als der in §. 106. erhaltene Coefficient der Variation $= 35'\ 12''$, obschon letzterer, weil er bloss w zum Factor hat, von der zweiten Ordnung ist.

§. 130.

Die Evection, die grösste unter allen Störungsgleichungen, ist es nun auch, durch welche die Geschwindigkeit der Apsidenbewegung so beträchtlich vermehrt wird. In der That sind die Coefficienten der Evection ihrem Zahlenwerthe nach nahe von derselben Ordnung wie e. Denn setzen wir diese Coefficienten

$$f_5 ew = Fe \text{ und } g_5 ew = Ge, \text{ so werden}$$

$$F = f_5 w = -\frac{29,039}{178,72} = -0,16248 = -\frac{1}{6,15} \text{ nächstens,}$$

$$G = g_5 w = +\frac{67,568}{178,72} = +0,37806 = +\frac{1}{2,64} \text{ nächstens,}$$

und hiernach etwa erst FF, GG und FG von gleicher Ordnung mit e, $= \frac{1}{18}$. Es lässt sich daher erwarten, dass wir uns schon dadurch der wahren Mondsbewegung um ein Bedeutendes nähern und insbesondere die Apsidenbewegung um Vieles richtiger erhalten werden, wenn wir bei einer zweiten Näherungsrechnung, als wodurch die Glieder von

der Ordnung w^2 gefunden werden sollen, die in P und Q zu substituirenden elliptischen Werthe von r und l durch keine andern von w abhängigen Glieder, als durch die Evection allein, gleichsam als durch eine zweite Mittelpunktsgleichung, verbessern und dann die Rechnung eben so fortführen, als wollten wir nur die Glieder der Ordnung w ermitteln.

Wir setzen demnach

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\alpha + Fe\cos(\lambda_1 - \alpha),$$
$$l = \lambda + 2e\sin\alpha + Ge\sin(\lambda_1 - \alpha).$$

Hieraus folgt $2(l - \lambda') = \lambda_1 + 4e\sin\alpha + 2Ge\sin(\lambda_1 - \alpha)$,

$$\cos 2(l - \lambda') = \cos\lambda_1 - 2e\cos(\lambda_1 - \alpha) + 2e\cos(\lambda_1 + \alpha)$$
$$- Ge\cos\alpha + Ge\cos(2\lambda_1 - \alpha);$$

und daher, wenn wir von jetzt an bloss diejenigen Glieder beachten, deren Argument α ist:

$$\frac{r}{a}\cos 2(l - \lambda') = -(G - \tfrac{1}{2}F)\,e\cos\alpha,$$

und eben so $\frac{r}{a}\sin 2(l - \lambda') = -(G - \frac{1}{2}F)\,e\sin\alpha$, folglich (§. 99.)

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}w - \tfrac{1}{2}ew\cos\alpha - \tfrac{3}{2}(G - \tfrac{1}{2}F)\,ew\cos\alpha,$$
$$V_1 = \tfrac{3}{2}(G - \tfrac{1}{2}F)\,ew\sin\alpha.$$

Wir sehen hieraus, dass wir auf der rechten Seite der Gleichungen [2] und [6] in §. 120, welche aus der Vergleichung der auf doppelte Weise ausgedrückten Werthe von T_1 und V_1 in Bezug auf das Argument α entsprangen, resp. $-\frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)\,w$ und $+\frac{3}{2}(G - \frac{1}{2}F)\,w$ hinzufügen müssen. Dieselben Zusätze sind daher auch bei den Gleichungen [2*] und [6*] in §. 125. zu machen. Letztere verwandeln sich dadurch in

$$[2^{**}] \quad -(2p + 2h - \tfrac{13}{6})\,w = -\tfrac{3}{2}(G - \tfrac{1}{2}F)\,w,$$
$$[6^{**}] \quad -(2p + h - \tfrac{1}{3})\,w = \tfrac{3}{2}(G - \tfrac{1}{2}F)\,w,$$

woraus nach Elimination von h

$$p = -\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{4}(G - \tfrac{1}{2}F) = -1{,}7834$$

folgt. Dies giebt (§. 125.) eine Umlaufszeit der Apsiden

von $\frac{13,369}{1,7834} = 7,496$ siderischen Jahren, welche von der wahren Umlaufszeit, $= 8,850$ Jahren (§. 128.), noch nicht um den 6ten Theil der letztern verschieden ist.

§. 131.

Aus der so eben geführten Rechnung geht wenigstens der mächtige Einfluss hervor, den die Evection auf die Vergrösserung der Apsidenbewegung ausüben kann. Denn die Genauigkeit, mit welcher wir diese Bewegung jetzt gefunden haben, ist fast eine bloss zufällige zu nennen, da wir nur den auf P und Q statt habenden Einfluss der Evection in Rechnung genommen, dagegen die in §§. 119. und 118. gemachten Entwickelungen von $r'' - rl'^2$, $2r'l' + rl''$ und die des Gliedes $-a^2 : r^2$ von T_1 unverändert beibehalten haben, obschon auch in diesen Entwickelungen, bei Berücksichtigung der jetzt als eine Ungleichheit der ersten Ordnung anzusehenden Evection, neue Glieder mit dem Argumente α sich bilden müssen. Wie man bald sieht, können diese neuen Glieder nicht anders, als durch Multiplication der Evection mit der Variation, entstehen. Um daher die in den gedachten Entwickelungen wegen der Evection noch hinzukommenden Glieder zu finden und damit die Apsidenbewegung noch genauer zu bestimmen, wird es hinreichen,

$$\frac{r}{a} = 1 + f_1 w \cos \lambda_1 + Fe \cos(\lambda_1 - \alpha) = 1 + x$$
$$l = \lambda + g_1 w \sin \lambda_1 + Ge \sin(\lambda_1 - \alpha)$$

zu setzen. Hieraus folgt zuerst

$$x^2 = \ldots + 2Ff_1 ew \cos(\lambda_1 - \alpha) \cos \lambda_1 = \ldots + Ff_1 ew \cos \alpha,$$

und daher $\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2x + 3x^2 = \ldots + 3Ff_1 ew \cos \alpha.$

Ferner wird:

$$\frac{r'}{na} = - k_1 f_1 w \sin \lambda_1 - k_3 Fe \sin(\lambda_1 - \alpha),$$
$$\frac{l'}{n} = 1 + k_1 g_1 w \cos \lambda_1 + k_3 Ge \cos(\lambda_1 - \alpha),$$
$$\frac{l''}{nn} = - k_1^2 g_1 w \sin \lambda_1 - k_3^2 Ge \sin(\lambda_1 - \alpha),$$

$$\frac{l'^2}{nn} = 1 + 2k_1 g_1 w \cos\lambda_1 + 2k_5 Ge\cos(\lambda_1 - \alpha) + k_1 k_5 G g_1 ew \cos\alpha,$$
$$\frac{rl'^2}{nna} = \ldots + (k_1 F g_1 + k_5 G f_1 + k_1 k_5 G g_1)\, ew \cos\alpha,$$
$$\frac{r'l'}{nna} = \ldots + \tfrac{1}{2} k_1 k_5\, (F g_1 - G f_1)\, ew \sin\alpha,$$
$$\frac{rl''}{nna} = \ldots - \tfrac{1}{2} (k_1^2 F g_1 - k_5^2 G f_1)\, ew \sin\alpha.$$

Hiermit, und weil r'' kein Glied mit dem Argumente α enthält, findet sich

$$T_1 = \frac{r'' - rl'^2}{nna} = \ldots - Aew\cos\alpha,$$
$$V_1 = \frac{2r'l' + rl''}{nna} = \ldots - Bew\sin\alpha, \text{ wo}$$
$$A = k_1 F g_1 + k_5 G f_1 + k_1 k_5 G g_1 \text{ und}$$
$$B = (\tfrac{1}{2} k_1 - k_5)\, k_1 F g_1 + (k_1 - \tfrac{1}{2} k_5)\, k_5 G f_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 - k_5)\, k_1 F g_1 + \tfrac{1}{2}(1 + k_1)\, k_5 G f_1,$$

wegen $k_1 - k_5 = 1$ (§. 121.). Man hat demnach zu den Gleichungen [2] und [6] in §. 120., also auch zu [2*] und [6*] in §. 125., mithin auch zu den schon durch die Evection, wiewohl nur unvollständig, verbesserten Gleichungen [2**] und [6**] in §. 130., linker Hand resp. $-Aw$ und $-Bw$, rechter Hand resp. $-3Ff_1 w$ (wegen $T_1 = -a^2 r^{-2} + ..$) und 0 hinzuzufügen. Letztere Gleichungen gehen dadurch über in

$$-2p - 2h + \tfrac{13}{6} - A = -\tfrac{3}{2}(G - \tfrac{1}{2}F) - 3Ff_1,$$
$$-2p - h + \tfrac{1}{3} - B = \tfrac{3}{2}(G - \tfrac{1}{2}F),$$

und hieraus h eliminirt, ergiebt sich

$$p = -\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{4}(G - \tfrac{1}{2}F) + \tfrac{1}{2}A - B - \tfrac{3}{2}Ff_1;$$

d. h. zu dem in §. 130. berechneten Werthe von p muss noch die Correction

$$\tfrac{1}{2}A - B - \tfrac{3}{2}Ff_1 = \tfrac{1}{2}k_1 k_5\, (G(g_1 - f_1) + F g_1) - \tfrac{3}{2}Ff_1$$

addirt werden. Mit den in §§. 106., 121. und 130. erhaltenen Werthen von

$$k_1 = 1{,}8504, \quad k_5 = 0{,}8504,$$
$$f_1 = -1{,}2876, \quad F = -0{,}1625,$$
$$g_1 = 1{,}8297, \quad G = 0{,}3781,$$

findet sich aber diese Correction = 0,3795, und damit

$$p = -1,7834 + 0,3795 = -1,4039,$$

woraus die Umlaufszeit der Apsiden = 9,522 Jahren folgt, welche die wahre von 8,850 Jahren nur um den 13ten Theil der letztern übertrifft.

Siebentes Kapitel.

Von der Seculargleichung des Mondes.

§. 132.

Zum Schlusse Dessen, was über die Ungleichheiten des Radius Vector und der Länge des Mondes hier füglich mitgetheilt werden konnte, mag noch in Kurzem die Theorie einer dahin gehörigen Ungleichheit gegeben werden, die zwar an sich eine der am wenigsten bemerkbaren ist, die aber dadurch, dass sie, so lange Beobachtungen existiren, immer nach einerlei Seite hin gewirkt hat, und dass die Geometer, sie aus dem Gesetze der allgemeinen Schwere zu erklären, lange Zeit sich vergeblich bemüht haben, ein grosses Interesse gewonnen hat. Bei Vergleichung von Beobachtungen, die um mehrere Jahrhunderte von einander entfernt liegen, hat man nämlich gefunden, dass der Mond in jedem folgenden Jahrhunderte einen Bogen von etwa 21 Secunden mehr beschreibt, als in dem vorhergehenden. Der englische Astronom Halley (geb. 1656, gest. 1742) war der erste, welcher auf diese Beschleunigung der Mondsbewegung aufmerksam machte (im Jahre 1693). Allein erst den Bemühungen eines Laplace (geb. 1749, gest. 1827) gelang es (im Jahre 1787), auch diese Erscheinung auf das Gesetz der Schwere zurückzuführen und ihren Grund in der durch die Einwirkung der Planeten sich allmählig ändernden Excentricität der Erdbahn nachzuweisen.

In der That ist, sobald man noch die zweite Potenz dieser Excentricität mit berücksichtigt, der Radius Vector der Sonne (§. 51.)

$$r' = a' (1 - e' \cos \alpha' + e'^2 \sin \alpha'^2) = a' (1 + x),$$

folglich $\frac{a'^3}{r'^3} = (1 + x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2$

$$= 1 + 3e' \cos \alpha' - 3e'^2 \sin \alpha'^2 + 6e'^2 \cos \alpha'^2$$
$$= 1 + 3e' \cos \alpha' + \tfrac{3}{2} e'^2 (1 + 3 \cos 2\alpha').$$

Hiermit wird, wenn man in $T_1 = - a^2 r^{-2} + wP$ und $V_1 = wQ$ bloss die nicht periodischen Glieder von P nnd Q in Betracht zieht:

$$P = \tfrac{1}{2} \frac{r}{a} \cdot \frac{a'^3}{r'^3} \cdot = \tfrac{1}{2} (1 + \tfrac{3}{2} e'^2) \text{ und } Q = 0 \text{ (§. 99.).}$$

Wegen der Excentricität der Erdbahn wird demnach der mittlere Werth der störenden Kraft, welche den Mond von der Erde zu entfernen sucht, um $\frac{3}{4} e'^2 w$ vergrössert; der mittlere Werth der auf den Radius Vector in der Bahnebene perpendikular wirkenden Kraft bleibt aber, wie vorher, null. Wenn folglich diese Excentricität nicht constant ist, sondern, wie es bisher geschehen, sich allmählig vermindert, so wird auch die störende Kraft, als welche im Mittel den Mond von der Erde abzuziehen strebt, immer kleiner werden, mithin auch die Entfernung des Mondes von der Erde sich allmählig verringern, seine Winkelgeschwindigkeit aber zunehmen (vergleiche §. 116.).

§. 133.

Der Werth von e' zu Anfange des Jahres 1800 war
$$= 0{,}01679226 = C,$$
und die Abnahme von e' in je hundert Jahren ist
$$= 0{,}00004299 = N;$$
also, wenn der Anfang von 1800 zur Epoche genommen wird, und t die Zahl der seitdem verflossenen Jahrhunderte bedeutet:

$$e' = C - Nt.$$

Mit Vernachlässigung des Quadrats und der höhern Potenzen von N können wir alsdann

$$e'^2 = C^2 - 2CNt = C^2 - 2C\sin Nt$$
$$= C^2 + 2C\cos(90^0 + Nt) \text{ setzen, wodurch (vor. §.)}$$
$$T_1 = -\frac{n^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}w(1 + \tfrac{3}{2}C^2) + \tfrac{3}{2}Cw\cos(90^0 + Nt)$$

und $V_1 = 0$ wird.

Aus der somit dem Ausdrucke für T_1 gegebenen Form lässt sich nun die gesuchte Bewegung ganz auf dieselbe Weise folgern, als wie in §. 113. aus dem Gliede $\tfrac{3}{2}e'w\cos\alpha'$ in T_1 — der Coefficient von $\sin\alpha'$ in V_1 war null — die Glieder mit dem Argumente α in r und l hergeleitet wurden. Es wird nämlich

$$r = a_,[1 + fw\cos(90^0 + Nt)],$$
$$l = \lambda + gw\sin(90^0 + Nt),$$

wo $f = \tfrac{3}{2}C\frac{1}{1-K^2}$, $g = -3C\frac{1}{K(1-K^2)}$, $K = \frac{N}{n}$ ist.

Mit Weglassung der zweiten und höhern Potenzen von N, und folglich auch von K, wird aber

$$f\cos(90^0 + Nt) = -f\sin Nt = -\tfrac{3}{2}CNt,$$
$$g\sin(90^0 + Nt) = g\cos Nt = -\frac{3Cn}{N}\left(1 + \frac{N^2}{n^2} - \tfrac{1}{2}N^2t^2\right),$$

und damit

$$r = a_,[1 - \tfrac{3}{2}CNwt],$$
$$l = \lambda - \frac{3Cn}{N}w - \frac{3CN}{n}w + \tfrac{3}{2}CNnw \,.\, t^2.$$

In Folge der erstern dieser Gleichungen nimmt r in jeder Zeiteinheit um $\tfrac{3}{2}CNw \,.\, a_,$ ab. In Folge der letztern ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich l ändert, $= n + 3CNnw \,.\, t$ (§. 10.), und nimmt folglich in jeder Zeiteinheit um $3CNnw$ zu. Die Abnahme von r ist für die Beobachtungen nicht merklich, wohl aber die Zunahme der Geschwindigkeit von l. Weil die Zeiteinheit im Gegenwärtigen ein Jahrhundert ist, und daher n die mittlere Bewegung des Mondes in 100 julianischen Jahren oder 36525 Tagen bedeutet, so ist (§. 66.)

$$n = \frac{360 \times 60 \times 60}{27,3217} \times 36525 \text{ Secunden.}$$

Mit diesem Werthe von n und mit den oben bemerkten Werthen von C und N findet sich das hundertjährige Wachsthum der Mondsbewegung

$$3CNnw = 21'',00.$$

Zusatz. Zu demselben Resultate kann man auch schon durch den Satz gelangen, dass, wenn die den Mond nach der Erde treibende Kraft in dem Verhältnisse $1 : 1 \mp \frac{1}{2}w$ ab- oder zunimmt, die mittlere Entfernung und die mittlere Bewegung in den Verhältnissen $1 : 1 \pm \frac{1}{2}w$ und $1 : 1 \mp w$ sich ändern (§. 102. *b.*). Denn da in jedem Jahrhunderte e'^2 um $2CN$ kleiner, folglich $-T_1, = a^2r^{-2} - \frac{1}{2}w(1 + \frac{3}{2}e'^2)$, um $\frac{3}{2}CNw$ grösser, und mithin jene Kraft in dem Verhältnisse $1 : 1 + \frac{3}{2}CNw$ grösser wird, so muss in jedem Jahrhunderte $a_{,}$ um $\frac{3}{4}a_{,}CNw$ abnehmen und n um $3nCNw$ wachsen.

§. 134.

Das stets positive Glied $\frac{3}{2}CNnwt^2, = 10'',50 \,.\, t^2$, womit nach vorigem §. die mittlere Länge des Mondes verbessert werden muss, wird die Seculargleichung des Mondes genannt. Sie ist am Ende des ersten, zweiten, dritten etc. Jahrhunderts nach der Epoche und am Anfange des ebensovielten vor derselben $= 10'',5;\ 42'',0;\ 1'\,34'',5;$ etc. Setzt man sie $= 1^0$, so wird $t = \sqrt{\frac{3600}{10,50}} = 18,5$, d. h. zu der mittlern Länge des Mondes, welche mit den zur Zeit der Epoche statt findenden Elementen für einen Zeitpunkt berechnet worden ist, der $18\frac{1}{2}$ Jahrhunderte vor oder nach der Epoche liegt, muss ein ganzer Grad addirt werden.

Um sich die Wirkung dieser Gleichung zu noch klarerer Anschauung zu bringen, denke man sich den mittlern Weg des Mondes während mehrerer Jahrhunderte in eine gerade Linie ausgedehnt. Zur Zeit der Epoche sei der Mond in A (Fig. 40.). Seien ferner $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und ${}_1A, {}_2A, {}_3A, \ldots$ seine Oerter, erstere 1, 2, 3, ... Jahrhunderte nach der Epoche, letztere eben so lange vorher, wenn er stets dieselbe Geschwindigkeit, wie in der Epoche selbst, hätte, so dass die Theile, in welche die Gerade durch diese Punkte getheilt wird, sämmtlich von gleicher Länge sind. Man

mache nun in der Richtung der Bewegung $A_1 B_1 = {}_1A_1B = x$, $A_2 B_2 = {}_2A_2B = 4x$, $A_3 B_3 = {}_3A_3B = 9x$, etc., wo $x = 10'',5$, so sind ... ${}_2B$, ${}_1B$, A, B_1, B_2, ... die Oerter des Mondes bei der durch die Seculargleichung beschleunigten Bewegung, und man sieht leicht, wie von den alsdann in den einzelnen Jahrhunderten durchlaufenen Wegen ... ${}_3B_2B$, ${}_2B_1B$, ${}_1BA$, AB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... jeder folgende um $2x$ grösser als der nächstvorhergehende ist.

Die Theorie der Planetenstörungen lehrt übrigens, dass die Excentricität der Erdbahn zwar mehrere Jahrhunderte hindurch, als der Zeit proportional sich ändernd, angesehen werden kann, dass aber bei längeren Zeiträumen das Quadrat und noch höhere Potenzen der Zeit mit in Rechnung genommen werden müssen, indem die Excentricität innerhalb gewisser ziemlich enger Grenzen in Perioden, deren Dauer viele Jahrtausende beträgt, abwechselnd grösser und kleiner wird. Dasselbe wird daher auch von der Aenderung der mittlern Mondsbewegung gelten, in welcher sich jene Aenderung der Excentricität gleichsam wie in einem vielfach vergrössernden Spiegel abbildet, und die jetzige Beschleunigung dieser Bewegung wird einst in eine Verzögerung übergehen.

Nach Damoiseau ist die Seculargleichung bis zur dritten Potenz der Zeit genau und für den Anfang des Jahres 1801 als Epoche:

$$10'',8786 \, . \, t^2 + 0'',015981 \, . \, t^3,$$

wovon das zweite Glied für Zeitpunkte, welche vor die Epoche fallen, seiner Natur nach negativ ist, und dessen Berücksichtigung nothwendig wird, wenn man z. B. bis zu der von den Chaldäern 720 Jahre vor Chr. beobachteten und von Ptolemäus uns aufbewahrten Mondfinsterniss zurückgehen will.

Mag noch bemerkt werden, dass nach Laplace's weiteren Forschungen (Méc. cél., Tome III. pag. 175.) auch die Länge der Apsiden und die der Knoten des Mondes durch die Verminderung der Excentricität der Erdbahn seculare Aenderungen erfahren, wodurch die vorwärtsgehende Bewegung der Apsiden und die rückwärtsgehende der Knoten verzögert werden, während die des Mondes selbst be-

schleunigt wird, und dass die Seculargleichungen dieser drei Bewegungen in den Verhältnissen 3 : 0,74 : 1 zu einander stehen.

Achtes Kapitel.

Von den Störungen der Breite des Mondes.

§. 135.

In dem Bisherigen, wo wir die hauptsächlichsten Störungen der Länge und des Radius Vector des Mondes zu bestimmen suchten, nahmen wir den Mond und die Sonne sich in derselben Ebene bewegend an, da bei der hier beabsichtigten Genauigkeit die kleine Neigung, welche die Bahnebenen von Sonne und Mond gegen einander haben, auf diese Störungen keinen Einfluss hatte. Die Neigung der beiden Bahnen kann aber durchaus nicht mehr unberücksichtigt bleiben, sobald wir die Störungen in der Breite des Mondes bestimmen wollen, als welche eben daher rühren, dass die Sonne bei ihrem jährlichen Umlauf um die Erde in dem einen Halbjahr über, in dem andern unter der Ebene der Mondsbahn steht, und wodurch zu den zwei in der Ebene selbst wirkenden Kräften T und V eine dritte auf ihr perpendikulare W hinzukommt, welche den Mond bald nach der einen, bald nach der andern Seite hin von der Ebene zu entfernen strebt.

Der Werth dieser Kraft, so genau, als wir seiner hier bedürfen, und nachdem er mit $n^2 a$ dividirt worden, ist (§. 100.)

$$W_1 = 3w \cos (l - l') \sin b',$$

worin b' die Breite der Sonne in Bezug auf die Mondsbahn bedeutet. Da $\cos (l - l')$ von $l - l' = 90^0$ bis $= 270^0$, also vom ersten bis zum letzten Viertel, negativ ist, so hat während dieser Zeit W_1 das entgegengesetzte Zeichen von b', d. h. der Mond wird in der von der Sonne entfernteren Hälfte seiner Bahn nach derjenigen Seite seiner Bahnebene

getrieben, auf welcher die Sonne nicht steht. Vom letzten bis zum ersten Viertel dagegen, wo er sich in der der Sonne nähern Bahnhälfte bewegt, treibt ihn die Kraft *W* nach der Seite der Sonne hin.

Um den Grund hiervon unmittelbar einzusehen, denke man sich die Bahnebene horizontal und die Sonne über derselben stehend. Von den nach verticalen Richtungen geschätzten Kräften, womit irgend zwei in der Ebene befindliche Körper *A* und *B* von der Sonne *S* angezogen werden, wird alsdann die Kraft für den der Sonne näheren Körper, welcher *A* sei, die grössere sein, und dieses nicht allein deswegen, weil *A* mit einer grösseren Kraft, als *B*, nach *S* direct gezogen wird, sondern auch, weil von den Richtungen *AS* und *BS* die erstere einen kleinern Winkel, als die letztere, mit der Verticale macht. Da nun vom ersten bis letzten Viertel die Erde, und vom letzten bis ersten der Mond der Sonne näher steht, so wird im erstern Zeitraume die Erde, im letztern der Mond, stärker nach oben getrieben. Die störende Kraft *W* ist aber der Unterschied dieser zwei verticalen Kräfte (vergl. §. 103.) und treibt folglich den Mond nur im letztern Zeitraume nach oben, im erstern dagegen nach unten*).

Dasselbe ergiebt sich auch leicht aus dem in §. 103. gefundenen Resultate, dass die ganze den Mond *L* störende Kraft *LN* (Fig. 37.) in der Ebene *TLS* wirkt und den Mond von seinem Radius *TL* nach der Seite zu, auf welcher die

*) Analytisch werden diese Schlüsse durch den in §. 95. für *W* erhaltenen Ausdruck

$$W = Km'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z$$

dargestellt, worin z, einerlei mit dem dortigen QP', der Abstand der Sonne von der Ebene der Mondsbahn, ϱ und r' die Entfernungen des Mondes und der Erde von der Sonne, und damit $\frac{Km'}{\varrho^2} \cdot \frac{z}{\varrho}$ und $\frac{Km'}{r'^2} \cdot \frac{z}{r'}$ die nach der Richtung von z geschätzten Kräfte sind, mit denen der Mond und die Erde von der Sonne angezogen werden. W, als er Unterschied dieser Kräfte, hat hiernach mit z einerlei Zeichen, oder das entgegengesetzte, jenachdem $\varrho <$ oder $> r'$ ist.

Sonne S steht, oder nach der entgegengesetzten, zu entfernen sucht, jenachdem T oder L der von S entferntere Körper ist. Denn denken wir uns noch durch TL die Ebene der Mondsbahn gelegt, so wird L im erstern Falle von dieser Ebene weg nach derjenigen Seite zu getrieben, auf welcher sich S befindet, folglich u. s. w.

§. 136.

Ehe wir zu den von der Kraft W erzeugten Wirkungen übergehen, müssen wir dem analytischen Ausdrucke von W eine zu diesem Zwecke dienlichere Gestalt zu geben suchen. — Heisst, wie im Früheren, ι die gegenseitige Neigung der Bahnebenen von Sonne und Mond, und ϑ' die Länge des aufsteigenden Knotens der Sonnenbahn auf der Mondsbahn, so ist $\sin b' = \sin \iota \sin (l' - \vartheta')$ (§. 47.) und damit

$$W_1 = 3w \sin \iota \cos (l - l') \sin (l' - \vartheta').$$

Da aber ιw von der dritten Ordnung ist, und hier über Grössen der dritten Ordnung hinaus nicht gegangen werden soll, so können wir in dieser Formel ι statt $\sin \iota$, und statt l und l' ihre mittlern Werthe λ und λ' setzen. Hierdurch wird

$$W_1 = 3\iota w \cos (\lambda - \lambda') \sin (\lambda' - \vartheta')$$
$$= \tfrac{3}{2}\iota w (\sin A_1 - \sin A_2),$$

wo der Kürze willen A_1 und A_2 für $\lambda - \vartheta'$ und $\lambda - 2\lambda' + \vartheta'$ geschrieben worden.

Durch die Kraft W wird nun der Mond von der Ebene, in welcher er in jedem Augenblicke fortgehen will, und deren Lage durch die Richtung seiner jedesmaligen Geschwindigkeit und den Ort der Erde bestimmt wird, bald auf die eine, bald auf die andere Seite getrieben und damit die Lage der Ebene selbst fortwährend geändert. Unter allen den verschiedenen Ebenen, in welche die Mondsbahn auf solche Weise nach und nach gebracht wird, wird es aber eine gewisse mittlere geben, die, wie es wenigstens für den Anfang scheint, unverändert bleibt, und von welcher sich der Mond um periodisch ab- und zunehmende Grössen entfernt, die nur von der Ordnung ιw sind, so dass sowohl seine

auf diese Ebene bezogene Breite, welche man b nenne, als der Winkel, den mit ihr seine jedesmalige Bahnebene macht, und welcher I heisse, ιw zum Factor haben. Um daher die Wirkung der Kraft W zu ermitteln, wollen wir die Bewegung des Mondes auf diese mittlere Ebene als Grundebene beziehen und seine rücksichtlich derselben statt findende Breite b zu bestimmen suchen.

Die Kraft, welche diese Breite erzeugt, ist perpendikular auf der Grundebene und werde mit U bezeichnet. Weil die ganze auf den Mond wirkende Kraft aus T, V, W zusammengesetzt ist, so ist $U =$ der Summe der Projectionen von T, V, W auf ein auf die Grundebene gesetztes Perpendikel, $=$ der Summe von T, V, W, nachdem jede dieser Kräfte mit dem Sinus des Winkels multiplicirt worden, den ihre Richtung mit der Grundebene macht.

Für die in der Richtung des Radius wirkende Kraft T ist dieser Winkel $= b$. Für die Kraft V sei er $= I'$; er ist kleiner als I, weil die Richtung von V in der Ebene der Mondsbahn liegt, und der grösste Winkel, den eine Linie dieser Ebene mit der Grundebene machen kann, $= I$ ist. Die Kraft W endlich ist auf der Ebene der Mondsbahn perpendikular und macht daher mit der Grundebene einen Winkel $= 90^0 + I$. Hiernach wird

$$U = T \sin b + V \sin I' + W \cos I,$$

folglich auch, wenn man $U : n^2a = U_1$ setzt:

$$U_1 = T_1 \sin b + V_1 \sin I' + W_1 \cos I.$$

Es ist aber $T_1 = -a^2r^{-2} + \ldots = -1 - 2e \cos \alpha + \ldots$ (§. 118.). Da ferner e von der ersten, V_1 von der zweiten, W_1 aber, so wie b, I und I' von der dritten Ordnung sind, und alle Grössen von der vierten Ordnung an vernachlässigt werden sollen, so zieht sich die Formel zusammen in

$$U_1 = -b + W_1,$$

wo also das zu W_1 noch hinzugefügte Glied $-b$ von der den Mond anziehenden und damit nach der Grundebene zurücktreibenden Kraft der Erde herrührt. Substituirt man darin für W_1 seinen obigen Werth, so kömmt:

$$(1) \quad U_1 = -b + \tfrac{3}{4}\iota w (\sin A_1 - \sin A_2),$$

worin man jetzt unter dem Winkel ι und dem Bogen ϑ', von welchem A_1 und A_2 Functionen sind, die Neigung und die Knotenlänge der Sonnenbahn in Bezug auf die Grundebene oder die mittlere Mondsbahn verstehe, indem davon dieselben auf die wirkliche Bahn bezogenen Elemente, oder ι und ϑ' in ihrer anfangs festgesetzten Bedeutung, ersichtlich nur um Grössen von der Ordnung ιw abweichen können.

§. 137.

Zu Folge des letzterhaltenen Ausdrucks für U_1 und nach Schlüssen, ganz denen ähnlich, durch welche aus den Ausdrücken für T_1 und V_1 die Störungen im Radius Vector und in der Länge gefunden wurden, wird der Ausdruck für die durch die Kraft U erzeugte Bewegung, mithin auch die Breite b, aus Gliedern bestehen, welche A_1 und A_2 zu Argumenten und ιw zum Factor haben. Wir setzen daher:

$$(2)\quad b = h_1 \iota w \sin A_1 + h_2 \iota w \sin A_2.$$

Hiermit wird einerseits

$$(3)\quad U_1 = (\tfrac{3}{2} - h_1)\, \iota w \sin A_1 - (\tfrac{3}{2} + h_2)\, \iota w \sin A_2.$$

Andererseits folgt daraus der Abstand des Mondes von der Grundebene,

$$= r \sin b = ab = a h_1 \iota w \sin A_1 + a h_2 \iota w \sin A_2,$$

und hieraus nach §. 38. die auf der Ebene perpendikulare Kraft, welche die dadurch ausgedrückte Bewegung hervorbringt:

$$U = - n^2 q_1{}^2 a h_1 \iota w \sin A_1 - n^2 q_2{}^2 a h_2 \iota w \sin A_2,$$

wo nq_1 und nq_2 die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit denen sich die Argumente A_1 und A_2 ändern; folglich

$$(4)\quad U_1 = - q_1{}^2 h_1 \iota w \sin A_1 - q_2{}^2 h_2 \iota w \sin A_2.$$

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks für U_1 mit dem obigen (3) ergiebt sich aber

$$(5)\quad \tfrac{3}{2} - h_1 = - q_1{}^2 h_1, \qquad (6)\quad \tfrac{3}{2} + h_2 = q_2{}^2 h_2,$$

woraus nun h_1 und h_2 zu bestimmen sind.

§. 138.

Unter der Hypothese, dass die zur Grundebene genommene mittlere Lage der Mondsbahn ungeändert bleibt, und weil die Ebene der Sonnenbahn, oder vielmehr der Erdbahn, ihre Lage nur äusserst langsam ändert, sind die Knoten der Sonnenbahn auf der Grundebene gleichfalls als fest, und daher der Bogen ϑ' als constant zu betrachten. Hiernach sind die Geschwindigkeiten von $\lambda - \vartheta'$ und $\lambda - 2\lambda' + \vartheta'$, oder von A_1 und A_2, $= n$ und $n - 2n'$; mithin

$$q_1 = 1 \text{ und } q_2 = 1 - \frac{2n'}{n} = 0,85040 \text{ (§. 100.)}.$$

Es ist daher, der Gleichung (6) zufolge:

$$h_2 = -\frac{3}{2(1 - q_2^2)} = -5,4185,$$

und weil nach den Beobachtungen der mittlere Werth von $\iota = 5^0\,8'\,48'' = 18528''$, und $w = 0,005595$ ist:

$$h_2 \iota w = -562'' = -9'\,22'',$$

folglich das zweite Glied im Ausdrucke (2) für b:

$$-9'\,22''.\sin(\lambda - 2\lambda' + \vartheta').$$

Dagegen wird mit $q_1 = 1$ die Gleichnng (5): $\frac{3}{2} - h_1 = -h_1$, was einen Widerspruch enthält, der, wie wir schon ahnen können, eine Folge der naturwidrigen, aber hier zu Grunde gelegten Hypothese ist, dass die mittlere Lage der Mondsbahn ungeändert bleibt. Denn im Gegentheile haben schon die alten Chaldäer die Beobachtung gemacht, dass während die Neigung der Mondsbahn gegen die Sonnenbahn durchschnittlich sich nicht ändert, die Knoten der erstern Bahn auf der letztern eine rückgängige Bewegung haben, mit welcher sie beiläufig aller 19 Jahre einen Umlauf vollenden.

Sei daher, um diese Bewegung jetzt mit in Rechnung zu nehmen, KE (Fig. 41.) die Ekliptik, K_0L_0 die mittlere Lage der Mondsbahn in der Epoche, KL ihre mittlere Lage in einem spätern von der Epoche um die Zeit t entfernten Zeitpunkte. Hiernach ist $L_0K_0E = LKE = \iota$ und K_0K die (in der Figur rechtläufig angenommene) Bewegnng des Mondsknotens in der Ekliptik während der Zeit t. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung setzen wir, da letztere von der

Störung durch die Sonne herrührt und mithin vom Coefficienten w abhängen muss, $= Qnw$, folglich $K_0K = Qnwt$.

Werde nun die mittlere Lage der Mondsbahn in der Epoche zur Grundebene gewählt, und werde der Zeitraum t, der über alle Grenzen wachsen kann, vor der Hand nur so gross genommen, dass $Qntw$ oder K_0K von gleicher Ordnung mit w bleibt. Abgesehen von allen periodischen Störungen der Breite wird sich der Mond am Ende von t in einem Punkte L der dann statt habenden mittlern Lage KL seiner Bahn befinden. Man errichte daselbst auf KL ein sphärisches Perpendikel LE, das wegen der Kleinheit von K_0K sehr nahe auch K_0L_0 in L_0 rechtwinklig schneiden wird. Alsdann ist bis auf Grössen der zweiten Ordnung genau

$$L_0E = \iota \sin K_0E,$$
$$LE = \iota \sin KE = \iota \sin (K_0E - K_0K),$$

folglich L_0L oder die von periodischen Störungen freie Breite, welche in der Knotenbewegung ihren Ursprung hat,

$$= \iota \sin K_0E - \iota \sin (K_0E - K_0K),$$

oder, weil hierin statt K_0E auch der davon um eine Grösse der zweiten Ordnung verschiedene Bogen $K_0L_0 = \lambda - \vartheta' = A_1$ gesetzt werden kann:

$$L_0L = \iota \sin A_1 - \iota \sin (A_1 - Qntw), \text{ und damit}$$

$$(2^*) \quad b = h_1\iota w \sin A_1 + \iota \sin A_1 - \iota \sin (A_1 - Qntw)$$
$$= h_1\iota w \sin A_1 + Qnt\iota w \cos A_1,$$

wenn das Glied mit dem Argumente A_2 jetzt ausser Betrachtung gelassen wird.

Mit diesem Werthe für b kann nun in der That der Gleichung (1) vollkommen Genüge geleistet werden. Denn erstens wird damit die Gleichung selbst:

$$(3^*) \quad U_1 = (\tfrac{3}{2} - h_1)\,\iota w \sin A_1 - Qnt\iota w \cos A_1.$$

Da ferner die Quadrate der Geschwindigkeiten, mit denen sich die Bögen A_1 und $A_1 - Qntw$ ändern, n^2 und $(n - Qnw)^2$, $= n^2(1 - 2Qw)$, sind, so ist die aus (2*) unmittelbar folgende Kraft, nachdem sie mit n^2a dividirt worden:

$$U_1 = -(\iota + h_1\iota w) \sin A_1 + \iota(1 - 2Qw) \sin (A_1 - Qntw)$$

d. i. $(4^*) \quad U_1 = -(2Q + h_1)\,\iota w \sin A_1 - Qnt\iota w \cos A_1.$

Dieser Werth von U_1 wird aber mit dem vorhergehenden (3*) identisch, sobald wir noch $-2Q = \frac{3}{2}$, also $Q = -\frac{3}{4}$ setzen und damit den Mondsknoten eine Geschwindigkeit $= -\frac{3}{4}nw$ beilegen. Es ist diese Geschwindigkeit ihrem absoluten Werthe nach eben so gross als diejenige, welche wir anfänglich (§. 125.)* für die Apsiden gefunden hatten. Die Umlaufszeit der Knoten beträgt hiernach 17,825 siderische Jahre (ebendaselbst), was von dem aus den Beobachtungen sich ergebenden Umlaufe von 6793, 3911 Tagen = 18,599 siderischen Jahren nicht beträchtlich abweicht. Endlich ist wegen des negativen Zeichens der Geschwindigkeit die Bewegung der Knoten rückläufig, was ebenfalls mit der Natur übereinstimmt.

Was noch den Coefficienten h_1 anlangt, so bleibt dieser bei der Vergleichung von (4*) mit (3*) unbestimmt. Auch hätten wir dieses schon voraussehen können, da das Glied $h_1 \iota w \sin A_1$ seiner Natur nach für keine Störung zu achten ist. Wäre nämlich dasselbe allein vorhanden, also $b = h_1 \iota w \sin A_1$, so würde sich der Mond in einem grössten Kreise bewegen, welcher mit dem durch die Knoten gelegten Kreise, auf welchen seine Bewegung bezogen wird, einen Winkel $= h_1 \iota w$ macht, so dass, weil ι der Winkel der Sonnenbahn mit dem letztern Kreise ist, nunmehr $\iota - h\iota w$ den die Neigung zu nennenden und schlechthin mit ι zu bezeichnenden Winkel ausdrücken würde. Wir können daher h_1 geradezu = 0 setzen.

Zusatz. Die mit der Epoche anfangende Zeit t darf nach dem Vorigen nur so lange wachsen, als die Grösse $Qnwt$ von einerlei Ordnung mit w bleibt, — also etwa einen Monat lang. Denn, für $t = 1$ Monat, ist nt oder der während t vom Monde durchlaufene mittlere scheinbare Weg = einem ganzen Kreise = 3, 14, und daher $Qnwt = -\frac{3}{4} \,.\, 3,14 \,.\, w = -2,36 \,.\, w$. Diese kurze Dauer von t kann aber dem vorhin gemachten Schlusse auf eine ununterbrochen und gleichförmig dauernde Knotenbewegung keinen Eintrag thun. Um nämlich den Lauf des Mondes länger als einen Monat zu verfolgen, dürfen wir nur den Anfang des folgenden Monats zu einer neuen Epoche, den

Anfang des darauf folgenden dritten Monats abermals zu einer neuen Epoche u. s. w. nehmen. So wie nun von der ersten bis zur zweiten Epoche oder während des ersten Monats die Geschwindigkeit der Knoten $= -\frac{3}{4}nw$ gefunden wurde, so wird sie auch während des zweiten, dritten etc. Monats von derselben Grösse sein.

§. 139.

Dem Ausdrucke (1) für U_1 geschieht demnach vollkommen Genüge, wenn man den sphärischen Abstand des Mondes von der Grundebene zur Zeit t nach der Epoche, oder seine Breite,

$$b = Qnt\iota w \cos(\lambda - \vartheta') + h_2\iota w \sin(\lambda - 2\lambda' + \vartheta')$$

setzt, worin $Q = -\frac{3}{4}$ und $h_2 w = -\frac{3n^2 w}{8n'(n-n')} = -\frac{3n'}{8(n-n')}$.

Das erste Glied hiervon, zu dessen Berechnung die Epoche etwa aller Monate erneuert werden muss, ist von dem Stande des Mondes gegen die Sonne unabhängig und drückt ein bei unveränderter Neigung gleichförmiges Rückwärtsgehen der mittlern Mondsbahn an der Sonnenbahn aus.

Das zweite Glied, welches rein periodischer Natur ist, kann als die Breite des Mondes in Bezug auf die Lage, welche die mittlere Bahn zur Zeit t hat, angesehen werden. Das darin vorkommende ϑ' ist nach dem Obigen die Knotenlänge der Sonnenbahn auf der mittlern Mondsbahn in der Epoche. Da aber die Rechnung offenbar desto genauer wird, je öfter man die Epoche erneuert, so wird man unter ϑ' noch besser die Knotenlänge zur Zeit t selbst zu verstehen haben.

Zusätze. *a.* Man verlängere die Bögen K_0L_0 und KL zu beiden Seiten bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten M und N, so ist der Winkel $MK_0K = \iota = MKE = K_0KN$, folglich auch $MKK_0 = NK_0K$. Die sphärischen Dreiecke K_0KM und KK_0N sind daher einander gleich, folglich $K_0M = NK$ und $KM = NK_0$, folglich $K_0M + KM = NK + KM = 180^0$. Ist folglich K_0K sehr klein, und sind daher die Bögen K_0M und KM nahe einander gleich, so ist jeder von

ihnen nahe $= 90^0$. Die Punkte, in denen sich zwei nächstfolgende Lagen der mittlern Mondsbahn schneiden, sind daher von den Knoten um 90^0 entfernt.

b. Fällt man von K auf $K_0 L_0$ das Perpendikel KO, so ist $OK = K_0 K \sin \iota = \iota \,.\, Qntw$, und es verhält sich $OK : L_0 L = \sin OM : \sin L_0 M = 1 : \cos K_0 L_0$, mithin $L_0 L = OK \cos K_0 L_0 = Qntw \cos A_1$, wie vorhin auf andere Weise gefolgert wurde.

§. 140.

Der aufsteigende Knoten K der Sonnenbahn auf der Mondsbahn und der aufsteigende Knoten der Mondsbahn auf der Sonnenbahn sind offenbar zwei um 180^0 von einander entfernte Punkte. Setzt man daher die Länge des letztern Knoten $= \vartheta$, so ist $\vartheta' = \vartheta + 180^0$, und die in §. 138. gefundene periodische Ungleichheit in der Breite wird

$$= + 9' \, 22'' \,.\, \sin (\lambda - 2\lambda' + \vartheta).$$

Auch kann man diese Ungleichheit, wegen der Kleinheit von ι, statt auf die Mondsbahn, auf die Sonnenbahn selbst beziehen, d. h. man kann um eben so viel den sphärischen Abstand von der Ekliptik, welchen der Mond bei der gleichförmigen Bewegung seiner Knoten haben würde, geändert ansehen.

Bedeuten demnach ϑ_0 und ϑ die in der Ekliptik gezählten mittleren Längen des aufsteigenden Mondsknotens in der Epoche und zur Zeit t, und sind für letztere Zeit und in Bezug auf die Ekliptik, β die Breite des Mondes, wenn er sich in seiner mittlern Bahn bewegte, b die wahre oder gestörte Breite, l die wahre Länge des Mondes in seiner Bahn (§. 47.), so hat man

$$1) \quad \vartheta = \vartheta_0 + Qnw \,.\, t,$$

wo der Zeitraum t von jeder beliebigen Länge sein kann, und wo, wenn er in Tagen ausgedrückt ist,

$$Qnw = - \frac{360^0}{6793,3911} = - 3' \, 10'', 774 \text{ ist;}$$

$$2) \quad \sin \beta = \sin \iota \sin (l - \vartheta),$$

wofür auch mit einer hier hinreichenden Genauigkeit

$$\beta = \iota \sin (l - \vartheta) = 5^0\, 8'\, 48'' \sin (l - \vartheta)$$

geschrieben werden kann*), und damit nach Damoiseau

$$3) \quad b = \beta + 8'\, 47'',8 \sin (l - 2\lambda' + \vartheta),$$

mit Weglassung der Gleichungen, welche zur vierten und höheren Ordnungen gehören, und deren grösste nur bis 26″ steigt. Die hier entwickelte Gleichung, welche den doppelten Abstand des Mondes von der Sonne, weniger dem Abstande des Mondes von seinem aufsteigenden Knoten, zum Argumente hat, ist daher unter allen Gleichungen der Breite bei weitem die grösste; sie ist eben so, wie die Variation und die jährliche Gleichung, von Tycho de Brahe entdeckt worden.

§. 141.

Da sich die mittlere Mondsbahn bei unveränderter Neigung gegen die Sonnenbahn an letzterer gleichförmig fortbewegt, so scheint es, dass sich die Theorie dieser Bewegung, wenn auch nicht die der periodischen Breitestörungen, etwas einfacher entwickeln lassen werde, wenn man die unbewegliche Ebene der Sonnenbahn selbst zur Grundebene wählt.

Zn dem Ende wollen wir zu den ursprünglich auf den Mond wirkenden Kräften zurückgehen. Diese sind (§. 94.) erstens eine ihn nach der Erde treibende Kraft $= K(M+m) : r^2$, zweitens eine ihn nach der Sonne treibende Kraft $= Km' : \varrho^2$, und drittens eine Kraft $= Km' : r'^2$, deren Richtung parallel mit der Richtung von der Sonne nach der Erde ist. Jede

---

*) Es folgt nämlich aus 2) bis zum Würfel von ι genau, und wenn ι und β in Secunden ausgedrückt sind:

$$\beta = \iota \sin (l - \vartheta) - \tfrac{1}{24} \iota^3 (\sin 1'')^2 [\sin (l - \vartheta) + \sin 3 (l - \vartheta)]$$
$$= 5^0\, 8'\, 41'',7 \sin (l - \vartheta) - 6'',2 \sin 3 (l - \vartheta).$$

— Eben so ist, wenn L die Länge des Mondes in der Ekliptik bedeutet,

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \iota \sin (L - \vartheta), \text{ woraus}$$

$$\beta = \iota \sin (L - \vartheta) + \tfrac{1}{12} \iota^3 (\sin 1'')^2 [\sin (L - \vartheta) + \sin 3 (L - \vartheta)]$$
$$= 5^0\, 9'\, 0'',3 \sin (L - \vartheta) + 12'',4 \sin 3 (L - \vartheta) \text{ folgt.}$$

dieser Kräfte zerlegen wir in zwei, von denen die eine parallel mit der Ebene der Ekliptik, die andere auf dieser Ebene perpendikular ist und daher hier allein in Betrachtung kommt. Sei nun die Entfernung des Mondes von dieser Ebene $= z$, und zwar positiv, wenn er nördlich von der Ebene absteht, so sind jene drei Kräfte, nach einer auf derselben perpendikularen Richtung geschätzt und positiv genommen, wenn sie den Mond nach Norden treiben:

$$-\frac{K(M+m)}{r^2}\cdot\frac{z}{r},\quad -\frac{Km'}{\varrho^2}\cdot\frac{z}{\varrho} \text{ und } 0.$$

Bezeichnen wir daher die Totalkraft, welche auf den Mond nach derselben Richtung wirkt, mit Z, so wird

$$Z = -K(M+m)\frac{z}{r^3} - Km'\frac{z}{\varrho^3},$$

oder, weil $m' = (M+m)\frac{a'^3}{a^3}w$ (§. 99.), nnd weil der Unterschied zwischen dem Quotienten $a'^3 : \varrho^3$ und der *Einheit* nur von der zweiten Ordnung ist (ebendaselbst):

$$(A)\quad Z = -K(M+m)\left(\frac{z}{r^3} + \frac{z}{a^3}w\right),$$

woraus die Bewegung des Mondes in Breite sich eben so genau, wie vorhin, ermitteln lassen muss.

Es ist aber $r = a(1 - \frac{1}{6}w)$ + einem Aggregat von periodischen Gliedern (§. 118.). Da aus diesen letztern keine andern Glieder, als ebenfalls periodische, in dem für die Breite gesuchten Ausdrucke hervorgehen können, so ist, weil wir die periodischen Breitenstörungen jetzt unberücksichtigt lassen wollen, r schlechthin $= a(1 - \frac{1}{6}w) = a_,$ zu setzen, woraus

$$(a)\quad Z = -K(M+m)(1+w)\frac{z}{a_,^3} \text{ folgt.}$$

Gesetzt nun, dass der Mond, in der Entfernung $a_,$ von der Erde, gar nicht gestört würde, und dass daher $w = 0$ wäre, so würde seine gegen die Ekliptik geneigte Bahnebene ungeändert bleiben, und folglich die Periode P seiner auf der Ekliptik perpendikularen durch Z erzeugten Bewegung seiner Umlaufszeit U in der Bahnebene, oder auch entlang der

Ekliptik, gleich sein, und man würde für U und P die Gleichungen haben (§. 65.):

$$(1)\quad K(M+m) = n^2 a_,^3 = 4\pi^2 a_,^3 : U^2 = 4\pi^2 a_,^3 : P^2.$$

Wirkt demnach auf den in der Entfernung $a_,$ von der Erde befindlichen Mond eine ihn perpendikular gegen die Ekliptik treibende Kraft

$$(b)\quad Z = -K(M+m)\frac{z}{a_,^3},$$

so hat seine in derselben Richtung geschätzte Bewegung eine durch die Gleichung (1) bestimmte Periode P. — Auch kann dieses unmittelbar aus der in §. 25. gegebenen Theorie der schwingenden Bewegung gefolgert werden.

Die Kraft Z in (a) ist aber in dem Verhältnisse $1 + w : 1$ grösser als die Kraft Z in (b), und die Sonne wirkt daher in dieser Beziehung eben so, als wenn die Summe der sich anziehenden Massen M und m sich in demselben Verhältnisse vergrössert hätte. Mithin wird für die Periode P bei der durch die Sonne gestörten Bewegung

$$K(M+m)(1+w) = 4\pi^2 a_,^3 : P^2 \text{ sein.}$$

Von der andern Seite ist für die Umlaufszeit U bei der nach der Ekliptik selbst geschätzten und durch die Sonne gestörten Bewegung (§. 102.)

$$K(M+m)(1-\tfrac{1}{2}w) = n^2 a_,^3 = 4\pi^2 a_,^3 : U^2.$$

Beim Hinzutritt der Sonnenstörung findet demnach zwischen U und P die Proportion statt:

$$U^2 : P^2 = 1 + w : 1 - \tfrac{1}{2}w = 1 : 1 - \tfrac{3}{2}w, \text{ also}$$
$$U : P = 1 : 1 - \tfrac{3}{4}w;$$

d. h. die Periode P oder die Umlaufszeit des Mondes in Bezug auf die Knoten ist in dem Verhältnisse $1 - \tfrac{3}{4}w : 1$ kleiner als seine Umlaufszeit in Bezug auf einen festen Punkt der Ekliptik. Die Knoten müssen folglich eine der Bewegung des Mondes entgegenkommende Bewegung haben, deren Geschwindigkeit sich zu der des Mondes wie $\tfrac{3}{4}w$ zu 1 verhält.

— Ohne Rechnung dürfte sich das Rückwärtsgehen der Knoten auf folgende Weise, der die eben gemachten Schlüsse gleichfalls zum Grunde liegen, am einfachsten erklären lassen:

Die nahe kreisförmige Bewegung des Mondes in einer gegen die Ekliptik geneigten Ebene ist, wenn sie nach einer auf der Ebene der Ekliptik perpendikularen Richtung geschätzt wird, Pendelschwingungen vergleichbar, deren Dauer, so lange die Lage der Bahnebene unverändert bleibt, einer halben siderischen Umlaufszeit des Mondes gleich ist. Diese Schwingungen werden durch die nach derselben perpendikularen Richtung geschätzte anziehende Kraft der Erde erzeugt. Durch die Anziehungskraft der Sonne, die, wenn sie gleichfalls nach dieser Richtung geschätzt wird, den Mond stets nach der Ebene der Ekliptik hintreibt, wird aber jene Kraft vergrössert und folglich die Schwingungsdauer vermindert, eben so wie die Schwingungen eines Pendels bei zunehmender Schwerkraft schneller werden. Der Mond muss folglich eher wieder zu demselben Knoten als zu demselben Sterne zurückkehren; folglich u. s. w.

Anmerkung. Um vermittelst der Gleichung (A) die periodischen Störungen der Breite zu finden, hat man, wie schon erinnert worden, die periodischen in r enthaltenen Glieder zu berücksichtigen. Die hierzu erforderliche Rechnung ist aber ungleich grösser, als bei der zu demselben Zwecke in §. 137. angewendeten Methode. Ohne hier näher darauf eingehen zu wollen, bemerke ich nur, dass die periodische Störung, deren Argument $2(\lambda - \lambda') - (\lambda - \vartheta)$ ist, aus der Variation oder derjenigen Störung der Länge und des Radius Vector entspringt, welche $2(\lambda - \lambda')$ zum Argumente hat.

§. 142.

Die Neigung ι und die Knotenlänge ϑ sind dasselbe in Bezug auf die Breite, was die Excentricität e und die Länge des Perigäums hinsichtlich der Länge waren, Denn so wie die mittlere Länge λ wegen der Excentricität durch die Mittelpunktsgleichung $2e \sin(\lambda - \pi)$ verbessert werden musste, so erhält der Ort des Mondes, der ohne Neigung der Bahn stets in die Ekliptik fallen würde, eine Breite $= \iota \sin(l - \vartheta)$. Auf gleiche Art sind rücksichtlich der Länge und der Breite das Vorwärtsgehen der Apsiden und das Rückwärtsgehen der Knoten einander entsprechende Bewegungen; denn beide sind von dem Stande des Mondes gegen die Sonne un-

abhängig und geschehen gleichförmig. Gleicherweise ist endlich die vorhin gefundene Gleichung der Breite dasselbe für die Breite, was die Evection für die Länge war. Denn das Argument der erstern Gleichung ist $2(\lambda - \lambda') - (\lambda - \vartheta)$, das der letztern $2(\lambda - \lambda') - (\lambda - \omega)$, und ιw Factor der erstern, ew der letztern Gleichung. So wie nun die letztere auch durch eine fortdauernde Aenderung der Excentricität und der Lage der Apsidenlinie, oder kurz durch eine Bewegung des Mittelpunktes der Ellipse, dargestellt werden konnte (§§. 123. 124.), so wird durch ähnliche Mittel auch die erstere Gleichung durch eine Aenderung der Neigung und der Knotenlänge, und somit durch eine Bewegung der Ebene der Mondsbahn sich erklären lassen.

In der That ist die durch erstere Gleichung gestörte Breite

$$b = \iota \sin(l - \vartheta) + h_2 \iota w \sin(l - 2\lambda' + \vartheta) \quad (\S.\ 140.)$$

Sie wird, wenn man

$$(\alpha) \begin{cases} \iota \cos\vartheta + h_2 \iota w \cos(2\lambda' - \vartheta) = J \cos\Theta \text{ und} \\ \iota \sin\vartheta + h_2 \iota w \sin(2\lambda' - \vartheta) = J \sin\Theta \text{ setzt:} \end{cases}$$

$$b = J \sin(l - \Theta).$$

Man wird daher die gestörte Breite geradezu finden, wenn man sie wie die nichtgestörte, aber nicht mit den Elementen ι und ϑ, sondern mit J und Θ berechnet, und man kann sich mithin die Störung in der Breite auch dadurch erzeugt vorstellen, dass die Neigung J und die Knotenlänge Θ nach dem durch (α) ausgedrückten Gesetze veränderlich sind.

Um uns dieses Gesetz zur Anschauung zu bringen, wollen wir die nach ihm bewirkte Aenderung der Lage der Mondsbahn, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Aenderung der Lage ihrer Pole, zu erforschen suchen. Sei bei der Projection auf die Kugelfläche der Kreis *OKF* (Fig. 42.) die Ekliptik, *O* der Anfangspunkt derselben, *E* ihr Nordpol, *p* der Nordpol der mittlern Mondsbahn, *KGK'* die nördliche Hälfte dieser Bahn, also *K* der aufsteigende Knoten derselben. Durch die Mittelpunkte *F* und *G* der Halbkreise *KFK'* und *KGK'* lege man einen grössten Kreis *FGH*; dieser

wird mit seinem Bogen FG den Winkel FKG oder die Neigung ι messen und durch E und p gehen, so dass $FE = Gp = 90^0$, mithin auch $Ep = FG = \iota$, und der nach links gerechnete Winkel $OEp = OK + KF + FK'H = \vartheta + 270^0$ ist.

Eben so hat man, wenn P den Pol der gestörten oder wahren Mondsbahn bezeichnet: $EP = J$ und $OEP = 270^0 + \Theta$.

Nun ist das sphärische Dreieck EpP so klein, dass es hier als eben betrachtet werden kann. Macht man daher noch den Winkel $OEX = 270^0$, wodurch $XEp = \vartheta$ und $XEP = \Theta$ wird, und projicirt jenes Dreieck rechtwinklig das einemal auf EX, das anderemal auf EO, so kommt:

$$\iota \cos \vartheta + pP \cos EX \wedge pP = J \cos \Theta,$$
$$\iota \sin \vartheta + pP \sin EX \wedge pP = J \sin \Theta.$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit (α) giebt aber: $pP = h_2 \iota w = 8' \, 48'' = \frac{5^0 \, 8' \, 48''}{35,091}$ und $EX \wedge pP = 2\lambda' - \vartheta$, also

$$EX \wedge pP - EX \wedge Ep = 2\lambda' - 2\vartheta,$$

d. i. $Ep \wedge pP = HpP = 2(\lambda' - \vartheta) = 2KS$, wenn S der mittlere Ort der Sonne in der Ekliptik ist.

Es beschreibt demnach der wahre Pol P der Mondsbahn um den mittlern p einen Kreis mit einem Halbmesser, welcher der 35ste Theil der Entfernung des mittlern p vom Pole E der Ekliptik ist, und mit einer Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Knotenlinie, welche doppelt so gross als die der Sonne in Bezug auf dieselbe Linie ist. Die auf diese Linie bezogene Umlaufszeit von P um p beträgt daher 173, 31 Tage, als die halbe Umlaufszeit der Sonne rücksichtlich der Knoten. Dabei liegt P von p auf der entgegengesetzten Seite von derjenigen, auf welcher E liegt, also nach H hin, wenn die Sonne durch den einen oder den andern Knoten geht. Denn für $KS = 0$ oder $= 180^0$ wird $HpP = 0$. In diesen Zeitpunkten hat die wahre Neigung EP ersichtlich ihren grössten Werth

$$= 5^0 \, 8' \, 48'' + 8' \, 48'' = 5^0 \, 17' \, 36''.$$

Eben so erhellet, dass, wenn die Sonne zwischen den

beiden Knoten in der Mitte, also in F oder in H ist, die wahre Neigung am kleinsten

$$= 5^0\,8'\,48'' - 8'\,48'' = 5^0\,0'\,0'' \text{ ist.}$$

In beiden Fällen ist der Winkel $pEP = 0$, und es coincidirt daher der wahre Knoten mit dem mittlern. Dagegen erreicht dieser Winkel seinen grössten Werth

$$= \frac{pP}{Ep \sin 1''} = \frac{8'\,48''}{5^0\,8'\,48'' \cdot \sin 1''} = 1^0\,37'\,58'',$$

und es ist folglich der wahre Knoten dem mittlern am weitesten, um $1^0\,38'$, voraus (hinter ihm zurück), wenn die Sonne dem einen oder dem andern Knoten um 45^0 vorausgeeilt (hinter ihm um 45^0 zurück) ist. In diesen letztern Fällen hat die Neigung ihren mittlern Werth.

Zusatz. Aus den Gleichungen (α) folgt, wenn man sie ähnlicherweise, wie die Gleichungen (1), .. (4) in §. 32. behandelt:

$$\iota + h_2 \iota w \cos 2\,(\lambda' - \vartheta) = J \cos\,(\Theta - \vartheta),$$
$$h_2 \iota w \sin 2\,(\lambda' - \vartheta) = J \sin\,(\Theta - \vartheta).$$

Weil nach der ersten dieser Gleichungen J mit ι, und nach der zweiten $J \sin\,(\Theta - \vartheta)$ mit ιw, folglich $\Theta - \vartheta$ mit w, von einerlei Ordnung ist, so kann man statt derselben auch schreiben:

$$J - \iota = h_2 \iota w \cos 2\,(\lambda' - \vartheta),$$
$$\Theta - \vartheta = h_2 w \sin 2\,(\lambda' - \vartheta).$$

Hiernach ändern sich die Neigung und die Knotenlänge dergestalt, dass die Ungleichheit der erstern dem Cosinus, die der letztern dem Sinus des doppelten Abstandes der Sonne vom aufsteigenden Knoten proportional ist, und dass die erstere Ungleichheit bis $8'\,48''$, die letztere bis $1^0\,37'\,58''$ anwachsen kann.

Dasselbe fliesst auch leicht aus der obigen Construction. Denn fällt man von P auf Ep das Perpendikel PQ, so ist die Ungleichheit der Neigung $= EP - Ep = pQ = pP \cos HpP$, und die Ungleichheit in der Bewegung der Knotenlinie oder der darauf perpendikularen EP, $=$ dem Winkel $HEP = QP : EQ = QP : Ep$ nächstens $= pP \sin HpP : Ep$. Es war aber $HpP = 2KS$, folglich u. s. w.

Neuntes Kapitel.

Von der Bestimmung der Elemente der Mondsbewegung.

§. 143.

Im Bisherigen haben wir die Befriedigung gehabt zu sehen, wie mit zu Grunde Legung des Newton'schen Attractionsgesetzes, und wenn wir von dem Störungscoefficienten w auch nur die erste Potenz beibehielten, doch alle schon vor Newton aus Beobachtungen erkannten Mondsstörungen mit ziemlicher Genauigkeit sich entwickeln liessen. Wir nahmen hierbei die elliptischen Elemente des Monds- und des Sonnenlaufs als historisch gegeben an und substituirten sie in den durch die Theorie erhaltenen Ausdrücken für die Coordinaten des Mondes.

Wie die Elemente einer rein elliptischen Bewegung aus Beobachtungen gefunden werden können, ist in §. 53. gezeigt worden. Offenbar aber kann jene Methode nicht ohne Weiteres auch auf den Mond, eben seiner beträchtlichen Störungen wegen, angewendet werden. Um daher nichts übrig zu lassen, was nicht unmittelbar, sei es aus der Theorie, oder aus Beobachtungen, geschöpft werden könnte, und somit eine möglichst vollständige Einsicht in die Berechnung der Mondsbewegung zu erlangen, haben wir noch zu lernen, wie die elliptischen Elemente der durch die Störung nicht mehr genau elliptischen Bewegung des Mondes durch Beobachtungen sich ermitteln lassen. Ehe dieses aber geschieht, wird es gut sein, die Gründe übersichtlich zusammenzustellen, auf denen unsere Ueberzeugung von der Richtigkeit der analytischen Formeln beruht, die wir, von dem Newton'schen Gesetz ausgehend, für den gestörten Mondslauf gefunden haben.

§. 144.

Wenn bei einem sich bewegenden Körper das Gesetz gegeben ist, nach welchem die ihn treibenden Kräfte von

seinem jedesmaligen Orte, oder von der Zeit, oder von beiden zugleich abhängen, und wenn nächstdem sein Ort und die Grösse und Richtung seiner Geschwindigkeit für einen gewissen Zeitpunkt gegeben sind, so ist damit sein Ort für jeden andern Zeitpunkt vollkommen bestimmt (§. 25.). Sind daher die Bewegung der Sonne um die Erde und für einen gewissen Zeitpunkt der Ort und die Geschwindigkeit des Mondes, und überdies die Verhältnisse zwischen den Massen von Sonne, Mond und Erde gegeben, so ist damit und unter der Voraussetzung der Richtigkeit des Newton'schen Gesetzes die Bewegung des Mondes um die Erde vollkommen bestimmt, und es müssen sich die drei Coordinaten des Mondes als Functionen der Zeit, und dieses nur auf Eine Weise, darstellen lassen. Sind folglich umgekehrt drei Functionen der Zeit, als die Coordinaten des Mondes, gegeben, und besitzen diese erstens die Eigenschaft, dass die aus ihnen nach bekannter Weise herzuleitenden Kräfte einerlei sind mit denen, welche dem Newton'schen Gesetze zufolge statt finden müssen; lassen sich aber auch zweitens den in den Functionen vorkommenden Constanten solche numerische Werthe beilegen, dass die damit für einen gewissen Zeitpunkt gemachte Bestimmung des Orts und der Geschwindigkeit des Mondes mit derjenigen, welche für denselben Zeitpunkt die Beobachtung unmittelbar giebt, zusammenfällt: so kann man versichert sein, dass diese Functionen, und keine andern, die richtigen Coordinaten des Mondes sind.

Beiden Forderungen wird nun durch die im Vorigen entwickelten Werthe der Coordinaten r, l und b und unter der postulirten Beschränkung auf die ersten Potenzen von w, e, e' und ι Genüge geleistet. Dass die erste Forderung erfüllt ist, geht aus der Vergleichung hervor, welche bei jenen Rechnungen, um die Coefficienten in den angenommenen Formen der Coordinaten zu bestimmen, zwischen den Werthen der Kräfte, welche aus diesen Formen geradezu folgen, und denen, welche das Newton'sche Gesetz giebt, jederzeit angestellt wurde. Die Erfüllbarkeit der zweiten Forderung erhellet daraus, dass, wenn man in den Coordinaten die Störungsglieder weglässt, die Constanten in den übrig blei-

benden, eine rein elliptische Bewegung darstellenden, Gliedern numerisch immer so bestimmt werden können, dass der Ort und die Geschwindigkeit des Mondes, welche für einen gewissen Zeitpunkt aus den Coordinaten durch Rechnung fliessen, einerlei sind mit denen, welche den Beobachtungen zufolge in demselben Zeitpunkte statt finden. Es wird daher auch mit Berücksichtigung der Störungsglieder, als welche die nämlichen Constanten enthalten, eine solche Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung durch Annahme etwas veränderter Werthe der Constanten oder der Mondselemente immer zu Stande gebracht werden können.

§. 145.

Was nun die Methode selbst anlangt, durch welche die Elemente der gestörten Mondsbewegung zu bestimmen sind, so geht aus dem eben Gesagten hervor, dass hierzu eben so, wie bei der rein elliptischen Bewegung, die für einen gewissen Zeitpunkt T_0 durch Beobachtung gefundenen Werthe der drei Coordinaten r, l, b und die Werthe der Geschwindigkeiten r', l', b', mit denen sie sich zu dieser Zeit ändern, hinreichen. Man hat alsdann 6 Gleichungen von der Form:

$$r = R + \delta R, \quad l = L + \delta L, \quad b = B + \delta B,$$
$$r' = R' + \delta R', \quad l' = L' + \delta L', \quad b' = B' + \delta B',$$

wo R, L, B, R', L', B' die für die Zeit T_0 mit den Elementen des Mondes zu berechnenden elliptischen Theile von r, l, ... b'; δR, δL, ... $\delta B'$ aber die Aggregate der hinzukommenden Störungen und daher durch die Theorie bekannte Functionen von der seit der Epoche bis T_0 verflossenen Zeit, von den Mondselementen und von den als bekannt vorauszusetzenden Elementen der Sonnenbewegung sind.

Man berechne nun zuerst mit r, l, ... b', wie bei einer rein elliptischen Bewegung, nach der Methode in §. 53 die sechs Elemente des Mondes. Da man hierzu die Grössen R, L, ... B' hätte nehmen sollen, und diese von r, l, ... b' um δR, δL, ... $\delta B'$ unterschieden sind, so werden die gefundenen Elemente kleine Fehler von der Ordnung w ent-

halten. Mit diesen Elementen berechne man die Störungen δR, δL, ... Die somit sich ergebenden Werthe, welche δR_1, δL_1, ... heissen, werden bis auf die erste Potenz von w incl. richtig sein, und wenn man daher mit $r - \delta R_1$, $l - \delta L_1$, etc., statt mit $r - \delta R$, $l - \delta L$, etc. oder R, L, ..., die Elemente nach der gedachten Methode von Neuem berechnet, so werden die Fehler derselben nur noch von der Ordnung w^2 sein. Durch Wiederholung desselben Verfahrens und unter der Voraussetzung, dass δR, δL, ... selbst bis zur Ordnung w^2 genau entwickelt sind, wird man hierauf die Elemente, nur noch mit Fehlern von der Ordnung w^3 behaftet, finden. Eine abermalige Wiederholung der Rechnung giebt die Elemente bis auf Fehler von der Ordnung w^4 genau, u. s. w.

§. 146.

Zu diesem Verfahren die Elemente des Mondslaufs zu bestimmen ist es aber nöthig folgende Bemerkungen noch hinzuzufügen.

1) Bei der in §. 53. erklärten uud hier zu Grunde gelegten Methode die Elemente eines Planeten zu bestimmen wurde die Formel $k^2 = n^2a^3$ mit angewendet, worin k^2 eine von einem Planeten zum andern so gut als ganz constante Zahl bezeichnet. Es ist nämlich $k^2 = K(M + m)$ (§§. 62. und 65.), wo K eine für jedes Paar sich anziehender Körper gleich grosse Zahl, und M und m die Massen dieser zwei Körper im Vergleich zur Sonnenmasse bedeuten, wenn letztere als Einheit der Masse bei Bestimmung der Zahl K zum Grunde gelegt worden ist. In §. 53. ist daher $M + m$ eine die Einheit äusserst wenig übertreffende Zahl. Im Gegenwärtigen aber sind M und m die Massen von Erde und Mond, und es muss daher ausser den drei Coordinaten und ihren Geschwindigkeiten noch ein siebentes Stück, nämlich die Summe der Massen von Erde und Mond im Vergleich zur Sonnenmasse, gegeben sein. Statt auf die Ermittelung dieser Massensumme auszugehen, wird es aber einfacher sein, beim Gebrauch der Methode in §. 53. die Formel $k^2 = n^2a^3$ ganz zu beseitigen und dafür den Werth von n geradezu

durch Beobachtungen zu bestimmen zu suchen, was mit dem vorläufig hinreichenden Grade von Genauigkeit schon dadurch geschehen kann, dass man zwei der Zeit nach sehr weit, um ein Jahrzehend oder Jahrhundert, von einander entfernte Beobachtungen der wahren Länge des Mondes mit einander vergleicht und den ganzen während dessen durchlaufenen Weg durch die Zwischenzeit dividirt. Mit der so bestimmten mittlern Bewegung n findet sich hierauf a durch Auflösung der cubischen Gleichung:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{n^2}{n^2 a^3}.$$

2) Die bei diesen Rechnungen sich ergebenden Werthe der mit der Zeit proportional sich ändernden Elemente ω und ϑ gehören dem Zeitpunkte T_0 an. Die Geschwindigkeiten, mit denen diese Aenderungen vor sich gehen, sind gegebene Functionen des Verhältnisses $n' : n$, und man wird somit die zwei wahren Längen, die man zur Bestimmung von n angewendet hat, in mittlere, die man statt der wahren hätte brauchen sollen, näherungsweise verwandeln und damit einen genauern Werth von n finden können. Ueberhaupt sieht man hieraus, wie mit der allmähligen Verbesserung der sechs Elemente a, ε, .. ϑ gleichzeitig auch die als siebentes Element zu betrachtende Grösse n sich berichtigen lässt.

Wenn übrigens das jetzt zur Elementenbestimmung angegebene Verfahren für die Praxis auch nicht das geeignetste ist, und man insbesondere wegen der kleinen Fehler, womit alle Beobachtungen behaftet sind, ausser der hier vorausgesetzten Beobachtung zur Zeit T_0 und den zwei Beobachtungen, welche zur Bestimmung von n dienen sollen, noch eine möglichst grosse Anzahl zu andern Zeitpunkten gehöriger benutzen wird, so wird das Gesagte doch hinreichen, um von der Möglichkeit solcher Rechnungen und ihrer Beschaffenheit im Allgemeinen einen Begriff zu verschaffen.

§. 147.

Ganz besonders ist noch hervorzuheben, dass nach den für die drei Coordinaten des Mondes hier entwickelten Aus-

drücken und selbst nach den viel weiter gehenden Entwickelungen von Laplace und Andern bloss die Länge des Perihels und die Länge des aufsteigenden Knotens der Zeit proportionalen Aenderungen unterworfen sind, während die übrigen Elemente constant bleiben, — abgesehen von den kleinen Variationen, welche durch die Aenderung der Excentricität der Erdbahn in der mittlern Bewegung des Mondes und seiner davon abhängenden mittlern Entfernung, sowie in der gleichförmigen Bewegung seiner Apsiden und Knoten, hervorgebracht werden (§. 134.). — Namentlich ist daher die Neigung der Mondsbahn gegen die Erdbahn vollkommen constant, obgleich man vermuthen möchte, dass diese Neigung wegen der nicht ganz constanten Lage der Erdbahn gleichfalls kleine Aenderungen erlitte; allein wie Laplace durch die Theorie, übereinstimmend mit den Beobachtungen aller Zeiten, gezeigt hat, wird bei sich ändernder Lage der Erdbahn die Mondsbahn durch die Wirkung der Sonne unaufhörlich zu derselben Neigung gegen die Erdbahn zurückgebracht.

§. 148.

Es ist schon in §. 129. auf die Schwierigkeiten aufmerksam gemacht worden, welche mit einer den Beobachtungen genügenden theoretischen Entwickelung der Coefficienten für die einzelnen Störungsgleichungen verbunden sind. Als man daher nach den ersten von Clairaut, Euler und d'Alembert angestellten Versuchen, die Ungleichheiten des Mondslaufs bloss durch die Theorie zu bestimmen, die Erfahrung gemacht hatte, dass die hiernach berechneten Tafeln von den Beobachtungen zu Zeiten noch bedeutend abwichen, so begnügte man sich die Theorie mehr nur zur Entwickelung der Argumente der Gleichungen zu benutzen, die Coefficienten aber durch Vergleichung der somit bloss ihrer Form nach bekannten Gleichungen mit so viel als möglich Beobachtungen zu bestimmen. Auf solche Weise entstanden die vortrefflichen Mondstafeln von Tobias Mayer, Mason, Bürg und Burkhardt, von denen die des letztern noch gegenwärtig zur Vorausberechnung des Mondslaufs in

den Berliner astronomischen Jahrbüchern und in der Connaissance des temps gebraucht werden.

Ungeachtet der grossen Vollkommenheit dieser Tafeln musste aber die Theorie des Mondes so lange noch unvollkommen erscheinen, als man der Beobachtungen zu etwas Weiterem als den 6 oder 7 Elementen der Bewegung benöthigt war. Die Akademie der Wissenschaften zu Paris setzte daher im Jahre 1820 einen Preis auf eine Mondstheorie, bei welcher nur jene Elemente aus den Beobachtungen, alles Uebrige aber aus dem Gesetze der allgemeinen Schwere hergeleitet wäre. Zwei Theorieen erhielten den Preis: die eine von Plana und Carlini, die andere von Damoiseau. Letztere hat ihr Verfasser mit den hier zu Grunde gelegten Tafeln begleitet, die zu ihrer gänzlichen Vollendung nur wenig zu wünschen übrig lassen.

Noch eine Mondstheorie ist im Jahre 1838 von Hansen erschienen: *Fundamenta nova investigationis orbitae verae, quam luna perlustrat*, etc. Ihr Verfasser hat sich darin höchst scharfsinniger und von den früheren ganz verschiedener Methoden bedient, um die so mühevolle Rechnung zu vereinfachen. Auch hat er nach diesen Methoden berechnete Tafeln versprochen, die aber bis jetzt noch erwartet werden.

Eine nähere Angabe der Eigenthümlichkeiten dieser verschiedenen Methoden würde hier nicht am Orte sein, da sie auf Kunstgriffen der höhern Analysis beruhen, die ich bei meinen Lesern nicht habe voraussetzen wollen. Statt dessen will ich zum Schlusse dieses Abschnitts die Elemente, nach denen Damoiseau seine Mondstafeln*) berechnet hat, und die vorzüglichern Gleichungen der Länge, der Horizontalparallaxe unter dem Aequator und der Breite nach denselben Tafeln hier noch zusammenstellen.

*) Tables de la lune, formées par la seule théorie de l'attraction, ... par Damoiseau, ... Paris 1828.

§. 149.

Bezeichnet, wie im Obigen, λ die mittlere Länge des Mondes, α seine mittlere Anomalie und ϑ die Länge seines aufsteigenden Knotens, und wird jede Länge vom mittleren Frühlingsäquinoctialpunkte an gerechnet, so ist nach Damoiseau's Tafeln für die mittlere Pariser Mitternacht, welche den 31. December 1800 vom 1. Januar 1801 trennt, als Epoche:

$$\lambda = 111^0\ 36'\ 42'',8,$$
$$\alpha = 205\ \ 29\ \ 58,4,$$
$$\vartheta = 13\ \ 54\ \ 54,2.$$

In 100 julianischen Jahren, d. i. in 36525 Tagen, beträgt das Wachsthum

von λ ... 1336 Umkreise $+\ 307^0\ 52'\ 41'',6$,
von α ... 1325 Umkreise $+\ 198\ \ 49\ \ 55,0$;
ϑ aber nimmt ab oder die Knoten gehen rückwärts
5 Umkreise $+\ 134^0\ 9'\ 57'',5$.

Hierzu kommen noch die Seculargleichungen

von λ ... $10'',8786 \,.\, t^2 + 0'',015981 \,.\, t^3$,
von α ... $50,0592 \,.\, t^2 + 0,073539 \,.\, t^3$,
von ϑ ... $6,6690 \,.\, t^2 + 0,009797 \,.\, t^3$,

wo t die Anzahl der seit der Epoche verflossenen Jahrhunderte ist.

Endlich sind, wenn λ' und α' die mittlere Länge und die mittlere Anomalie der Sonne bedeuten, zur Zeit der Epoche

$$\lambda' = 280^0\ 9'\ 32'',0,$$
$$\alpha' = 0\ \ 39\ \ 7,0,$$

das seculare Wachsthum

von λ' ... 100 Umkreise $+\ 0^0\ 45'\ 53'',0$,
von α' ... 99 Umkreise $+\ 359\ \ 2\ \ 43,0$.

Hiermit kann man die Werthe von λ, α, ϑ, λ' und α' für jeden gegebenen Zeitpunkt berechnen. Die wahre in der Ekliptik gezählte Länge des Mondes ist alsdann, wenn man der Kürze willen $\lambda - \lambda' = \delta$ und $\lambda - \vartheta = \zeta$ setzt:

$\lambda + 6^0\,17'\,19'',7 \sin\alpha + 12'\,48'',8 \sin 2\alpha + 36'',1 \sin 3\alpha$
$+ 1^0\,16'\,28'',2 \sin(2\delta - \alpha) + 31'',0 \sin(4\delta - 2\alpha)$
$- 2'\,2'',1 \sin\delta + 39'\,29'',7 \sin 2\delta$
$- 11'\,13'',0 \sin\alpha' - 6'\,51'',8 \sin 2\zeta$
$- 3'\,31'',9 \sin(2\alpha - 2\delta) + 3'\,12'',2 \sin(2\delta + \alpha)$
$+ 3'\,26'',7 \sin(2\delta - \alpha' - \alpha) + 2'\,45'',5 \sin(2\delta - \alpha')$
$+ 2'\,28'',0 \sin(\alpha - \alpha') - 1'\,49'',4 \sin(\alpha + \alpha')$
$- 45'',2 \sin(2\zeta + \alpha) - 39'',4 \sin(2\zeta - \alpha) - 56'',5 \sin(2\zeta - 2\delta)$
$+ 38'',5 \sin(4\delta - \alpha) - 29'',0 \sin(2\delta + \alpha' - \alpha) - 24'',6 \sin(2\delta + \alpha')$,

wozu noch 65 andere Gleichungen kommen, nämlich 6, deren Coefficienten zwischen 20″ und 10″ fallen, und 59, deren Coefficienten kleiner als 10″ sind. Die hier mitgetheilten 21 Gleichungen reichen daher nur hin um die wahre Länge bis auf etwa eine halbe Minute genau zu finden. Die drei ersten derselben machen die Mittelpunktsgleichung aus, die 4te und 5te die Evection; die 6te ist die parallaktische Gleichung (§. 111.), die 7te die Variation, die 8te die *jährliche* Gleichung. Die 9te Gleichung ist die vorzüglichste unter denen, durch welche die Länge des Mondes in seiner Bahn auf die Ekliptik reducirt wird (§. 48. Anmerkung).

Die Horizontalparallaxe ist nach denselben Tafeln:

$57'\,0'',9 + 3'\,6'',5 \cos\alpha + 10'',2 \cos 2\alpha$ (Mittelpunktsgleich.)
$+ 34'',4 \cos(2\delta - \alpha) + 3'',1 \cos(2\delta + \alpha)$ (§. 121.)
$- 1'',0 \cos\delta + 28'',5 \cos 2\delta$ (§. 111.)
$+ 1'',9 \cos(2\delta - \alpha')$ (§. 114.)
$+ 1'',4 \cos(2\delta - \alpha' - \alpha) + 1'',2 \cos(\alpha - \alpha')$

+ noch 13 andern Gleichungen, deren Coefficienten $< 1''$.

Bezeichnet man endlich mit A, $\varDelta$, Z die Werthe von α, δ, ζ, nachdem man zu jedem der letztern die Summe der Gleichungen der Länge hinzugefügt hat, so ist die Breite des Mondes

$5^0\,8'\,59'',8 \sin Z + 8'\,47'',8 \sin(2\varDelta - Z)$ (§. 140.)
$+ 25'',8 \sin(2A - Z) + 22'',0 \sin(2\varDelta - Z - \alpha')$
$+ 23'',8 \sin(Z + \alpha') - 25'',1 \sin(Z - \alpha')$

+ 13 Gleichungen, deren Coefficienten $< 20''$.

Anmerkung. Unter den wegen ihrer Kleinheit hier weggelassenen Gleichungen sind besonders zwei merkwürdig, welche von der abgeplatteten Gestalt der Erde herrühren (§. 71. zu Ende). Die eine, welche die Länge betrifft, ist $= 7'',3$, multiplicirt in den Sinus der Länge des aufsteigenden Knoten; die andere, eine Gleichung der Breite, ist $= -8'',6$, multiplicirt in den Sinus der wahren Länge des Mondes. Die Coefficienten dieser Gleichungen, und zwar jeder von ihnen für sich, können, wenn sie geradezu aus Beobachtungen bestimmt werden, zur Ermittelung der Abplattung dienen. Bürg fand aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen die Coefficienten $= 6'',8$ und $-8'',0$, woraus Laplace die Abplattung resp. $= \frac{1}{305,05}$ und $\frac{1}{304,6}$ folgerte, zwei Resultate, die nicht nur sehr nahe unter sich, sondern auch mit der aus Gradmessungen geschlossenen Abplattung übereinstimmen. Damoiseau, welcher seine Coefficienten theoretisch bestimmt hat, muss hiernach eine etwas grössere Abplattung, $= \frac{1}{294}$, wie ich sie aus seinen Coefficienten nach den Formeln in der Méc. cél. Tome III. pag. 251 etc. finde, zu Grunde gelegt haben.

Vierter Abschnitt.

Von den gegenseitigen Störungen der Planeten.

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Von den Störungen, welche von den Excentricitäten und der Neigung unabhängig sind.

---

§. 150.

Fast keine Aufgabe hat den Astronomen grössere Schwierigkeiten entgegengestellt, als die Entwickelung der Störungen, welche der Mond durch die Sonne erleidet. Der Grund hiervon ist hauptsächlich die Grösse der störenden Kraft, die bis zum 89sten Theile der Hauptkraft, welche den Mond nach der Erde zieht, anwachsen kann (§. 103.). Ungleich geringer sind die störenden Kräfte, welche die Planeten auf einander ausüben, im Vergleich zu den Kräften, welche sie um die Sonne zu kreisen nöthigen. Obgleich daher das im Vorigen angewendete Verfahren, um die Mondsstörungen zu berechnen, für die wirkliche Ausführung, wo eine die Beobachtungen befriedigende Genauigkeit erzielt werden soll, keineswegs das geeignetste ist und nur deshalb befolgt wurde, weil es am leichtesten verständlich war, so wird doch dasselbe Verfahren bei den Störungen der Planeten, wenigstens der älteren, deren Excentricitäten und Neigungen durchschnittlich nur gering sind, fast vollkommen Genüge leisten und uns alle von der elliptischen Bewegung wahrnehmbaren kleinen Abweichungen leicht finden lassen, — mit Ausnahme einiger wenigen, zu deren Erforschung eine tiefer gehende Rechnung nöthig ist.

§. 151.

Auch bei der Theorie der Planeten werden uns die drei für das Problem der drei Körper in §. 95. gefundenen Grundformeln

$$T = -\frac{K(M+m)}{r^2} + Km' \,.\, P, \quad V = Km' \,.\, Q, \quad W = Km' \,.\, R$$

als Ausgangspunkt dienen. In ihnen bedeuten jetzt M, m und m' die Massen der Sonne, des gestörten Planeten und des störenden; P, Q und R sind Grössen, die auf eine aus §. 95. zu ersehende Weise von den Radien Vectoren r, r' der Planeten m, m', ihren heliocentrischen Längen l, l', beide in der Bahn von m gerechnet, und der heliocentrischen Breite b' von m' in Bezug auf dieselbe Bahn abhängen; T, V und W endlich sind die drei auf m nach den ebendaselbst angegebenen Richtungen wirkenden Kräfte. Die in ihren Ausdrücken mit m' multiplicirten Glieder sind die störenden Kräfte, und das Glied von T, welches $M + m$ zum Factor hat, ist die den Planet m nach der Sonne treibende Kraft. Der Grund, aus welchem die erstern gegen diese letztere jetzt sehr gering sind, ist die ausserordentliche Kleinheit von m' gegen M, während bei der Störung des Mondes durch die Sonne die sehr grosse gegenseitige Entfernung beider Körper im Verhältnisse zur Entfernung des Mondes von der Erde es war, weshalb die störende Kraft gegen die Hauptkraft, welche die Bewegung des Mondes regulirte, so gering ausfiel.

§. 152.

Bezeichne n die mittlere Bewegung von m, — und zwar zur Zeit der Epoche, dafern sich diese Bewegung nicht völlig constant finden sollte. Die zu n nach der elliptischen Theorie gehörige mittlere Entfernung des m von der Sonne sei $= a$, also

$$K(M + m) = n^2 a^3.$$

Die Substitution des hieraus folgenden Werthes von K in den Gleichungen für T, V, W giebt:

$$T = -\frac{n^2 a^3}{r^2} + \frac{m'}{M+m} \,.\, n^2 a^3 P, \quad V = \frac{m'}{M+m} \,.\, n^2 a^3 Q,$$

$$W = \frac{m'}{M+m} \,.\, n^2 a^3 R.$$

Nun sind $\frac{m}{M}$ und $\frac{m'}{M}$ sehr kleine Brüche, von denen, be-

sondere Fälle ausgenommen, ihr Product, so wie die zweite und die höheren Potenzen immer vernachlässigt werden können. Setzt man daher noch die Masse der Sonne $M = 1$, so kann man für $\frac{m'}{M + m}$ schlechthin m' schreiben, und die Formeln werden, wenn man sie noch, wie in §. 99., mit $n^2 a$ dividirt und

$$\frac{T}{n^2 a} = T_1, \quad \frac{V}{n^2 a} = V_1, \quad \frac{W}{n^2 a} = W_1$$

setzt, d. h. diejenige Kraft ($= n^2 a$) zur Einheit nimmt, welche einen in der Entfernung a von der Sonne befindlichen Körper um letztere einen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit n zu beschreiben nöthigt:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + m' a^2 P, \quad V_1 = m' a^2 Q, \quad W_1 = m' a^2 R$$

§. 153.

Zunächst sind nun in diesen Formeln für P, Q, R ihre durch die Coordinaten r, l, r', l', b' ausgedrückten Werthe zu setzen. Es besteht aber jede dieser Coordinaten aus zwei Theilen, von denen der eine rein elliptisch ist, der andere die Störungen enthält und daher m' zum Factor hat. Da nun von m' bloss die erste Potenz beibehalten werden soll, so reicht es hin, in P, Q, R bloss die elliptischen Theile der Coordinaten zu substituiren.

Wir wollen aber für's Erste auch noch die Excentricitäten der beiden Bahnen unberücksichtigt lassen, also annehmen, dass m' sich in einem Kreise um die Sonne bewege, und dass die Bahn von m, wenn keine Störung statt fände, gleichfalls kreisförmig wäre. Wir wollen ferner wegen der Kleinheit der gegenseitigen Neigung beider Bahnen die zweite und die höheren Potenzen der Neigung unbeachtet lassen. Alsdann ist, wenn die mittlere Entfernung des m' von der Sonne $= a'$ und die mittleren Längen von m und m', λ und λ' gesetzt werden: $r = a$, $l = \lambda$, $r' = a'$, $l' = \lambda'$, und es kommt, wenn man noch der Kürze willen u statt $\lambda - \lambda'$ schreibt:

$$P = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \cos u - \frac{a}{\varrho^3} = \frac{a' \cos u - a}{\varrho^3} - \frac{\cos u}{a'^2},$$

$$Q = -\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \sin u, \quad R = \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \sin b',$$

wo $\frac{1}{\varrho^3} = (a^2 - 2aa' \cos u + a'^2)^{-\frac{3}{2}}$ ist (§. 96.).

Letzterer Ausdruck ist nun, um ihn für die folgenden Rechnungen brauchbar zu machen, in eine Reihe zu entwickeln, deren Glieder die Vielfachen von u zu Argumenten haben.

Bei der Mondstheorie, wo $\frac{a}{a'}$ ein sehr kleiner Bruch $= \frac{1}{399}$ war, convergirte diese Reihe so schnell, dass für unsern Zweck die zwei ersten Glieder derselben vollkommen hinreichten. Anders verhält es sich gegenwärtig, wo nach den zwei Planeten, die zugleich in Betracht kommen, und nach den damit bald grössern, bald geringern Abweichungen des Verhältnisses $a : a'$ von der Einheit die Reihe bald ebenfalls ziemlich schnell, bald aber so langsam convergirt, dass man, um ein sattsam genaues Resultat zu erhalten, eine ziemlich grosse Anzahl von Gliedern entwickeln muss. Diese Entwickelung ist nun allerdings einer der mühsamsten, zugleich aber auch, wegen der merkwürdigen dabei vorkommenden Relationen, einer der interessantesten Theile der Störungsrechnungen. — Folgendes wird uns die nöthigen Begriffe davon verschaffen.

§. 154.

Werde $a^2 - 2aa' \cos u + a'^2 = U$ gesetzt und zuerst ganz allgemein die Entwickelung der Function U^{-s} verlangt. —

Man setze $a = a'b$ und damit

$$U = a'^2 (1 - 2b \cos u + b^2),$$

und denke sich nun das Trinomium $1 - \ldots$ nach b in die zwei Factoren $1 - bx$ und $1 - by$ aufgelöst, so dass

$$1 - 2b \cos u + b^2 = 1 - b(x + y) + b^2 xy.$$

Dies giebt

$$(a) \ldots x + y = 2 \cos u \text{ und } xy = 1, \text{ also } y = \frac{1}{x},$$

und es wird

$$U^{-s} = a'^{-2s}\,(1-bx)^{-s}\,(1-by)^{-s}.$$

Es ist aber

$$(1-bx)^{-s} = 1 + \alpha bx + \beta b^2x^2 + \gamma b^3x^3 + \ldots,$$

wo

$$\alpha = s,\quad \beta = \frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2},\quad \gamma = \frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3},\ \text{etc.}$$

und eben so

$$(1-by)^{-s} = 1 + \frac{\alpha b}{x} + \frac{\beta b^2}{x^2} + \frac{\gamma b^3}{x^3} + \ldots;\ \text{folglich}$$

$$(b)\quad U^{-s} = a'^{-2s}\,[1 + \alpha^2b^2 + \beta^2b^4 + \gamma^2b^6 + \ldots$$
$$+ (\alpha b + \alpha\beta b^3 + \beta\gamma b^5 + \ldots)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$+ (\beta b^2 + \alpha\gamma b^4 + \ldots)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (\gamma b^3 + \ldots)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \ldots]$$

Nun ist nach (a) ... $x + \frac{1}{x} = 2\cos u$ und mithin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4\cos u^2 - 2 = 2\cos 2u,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{x}$$
$$= 4\cos 2u\cos u - 2\cos u = 2\cos 3u,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - x^2 - \frac{1}{x^2}$$
$$= 4\cos 3u\cos u - \cos 2u = 2\cos 4u,$$

u. s. w. Denkt man sich daher in (b) für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ihre durch s ausgedrückten Werthe substituirt und setzt dann

$$2a'^{-2s}\left[1 + s^2b^2 + \left(\frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\right)^2b^4 + \left(\frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^2b^6 + ..\right] = \mathfrak{A}_0$$

$$2a'^{-2s}\left[sb + \frac{s}{1}\,.\,\frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\,b^3 + \frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\,.\,\frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^5 + ..\right] = \mathfrak{A}_1$$

$$2a'^{-2s}\left[\frac{s\,.\,s+1}{1\,.\,2}\,b^2 + \frac{s}{1}\,.\,\frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^4 + \ldots\right] = \mathfrak{A}_2$$

$$2a'^{-2s}\left[\frac{s\,.\,s+1\,.\,s+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^3 + \ldots\right] = \mathfrak{A}_3,\ \text{u. s. w.,}$$

so wird:

$$U^{-s} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1\cos u + \mathfrak{A}_2\cos 2u + \mathfrak{A}_3\cos 3u + \ldots,$$

oder, wenn man noch annimmt, dass $\mathfrak{A}_{-1} = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_{-2} = \mathfrak{A}_2$, etc.:

$$U^{-s} = \ldots + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{-2} \cos(-2u) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{-1} \cos(-u) \\ + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_1 \cos u + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_2 \cos 2u + \ldots,$$

also mit Anwendung des Summenzeichens Σ:

$$U^{-s} = \tfrac{1}{2}\Sigma\mathfrak{A}_i \cos iu,$$

worin für i nach und nach alle positiven und negativen ganzen Zahlen, Null nicht ausgeschlossen, zu setzen sind.

§. 155.

Um in dem Folgenden mit Leichtigkeit operiren zu können, wird es gut sein, einige goniometrische Formeln und dahin gehörige Sätze, welche Summen von der eben erhaltenen Form betreffen, hier einzuschalten.

I. Sind A_i, B_i, ... beliebige Functionen von i, und bezeichnen l, m, ... beliebige constante Zahlen, k eine constante ganze Zahl, so ist, wenn für i nach und nach alle Zahlen der Reihe ... -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... gesetzt werden:

$$\Sigma A_{i+l} B_{i+m} \ldots = \Sigma A_{i+k+l} B_{i+k+m} \ldots$$

Denn jeder der beiden Ausdrücke stellt eine nach beiden Seiten unendlich fortgesetzte Reihe vor, von welcher $A_l B_m$ ... ein Glied ist, und wo jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden dadurch erhalten wird, dass man die Indices von A, B, ... um 1 vergrössert.

II. Ist F_i eine ungerade Function von i, wie z. B. $ai + bi^3$, so ist $F_{-i} = -F_i$, und daher $\Sigma F_i = 0$, mithin auch z. B. $\Sigma F_i \cos iu = 0$, weil $\cos iu$ eine gerade Function von i ist.

Von jetzt an sollen unter A_i, B_i, C_i, ... ohne weiteren Zusatz nur gerade Functionen von i verstanden werden, so dass $A_{-i} = A_i$, $B_{-i} = B_i$, etc. Alsdann sind z. B. iA_i und $A_i \sin iu$ ungerade Functionen von i, und daher

$$\Sigma iA_i = 0 \text{ und } \Sigma A_i \sin iu = 0.$$

III. Man hat $\cos(iu+v) = \cos iu \cos v - \sin iu \sin v$, mithin auch

$$\Sigma A_i \cos(iu+v) = \cos v \Sigma A_i \cos iu - \sin v \Sigma A_i \sin iu$$

und

$$\Sigma i A_i \cos(iu+v) = \cos v \Sigma i A_i \cos iu - \text{siu}\, v \Sigma i A_i \sin iu.$$

Es ist aber nach II ... $\Sigma A_i \sin iu = 0$ und $\Sigma i A_i \cos iu = 0$, folglich

$$(a) \quad \cos v \Sigma A_i \cos iu = \Sigma A_i \cos(iu+v),$$

$$(b) \quad \sin v \Sigma i A_i \sin iu = -\Sigma i A_i \cos(iu+v).$$

Auf gleiche Weise findet sich durch Entwickelung von $\sin(iu+v)$:

$$(c) \quad \sin v \Sigma A_i \cos iu = \Sigma A_i \sin(iu+v),$$

$$(d) \quad \cos v \Sigma i A_i \sin iu = \Sigma i A_i \sin(iu+v).$$

IV. Ist u eine veränderliche, und A_i für einen bestimmten Werth von i eine constante Grösse, und findet sich $\Sigma A_i \cos iu = 0$, so hat man daraus zu schliessen: $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, etc. Aus $\Sigma i A_i \sin iu = 0$ aber folgt $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, etc., nicht auch $A_0 = 0$.

Unter denselben Voraussetzungen, und wenn k eine constante Zahl bedeutet, hat man aus $\Sigma A_{k+i} \cos iu = 0$ zu folgern:

$A_k = 0$, $A_{k+1} + A_{k-1} = 0$, $A_{k+2} + A_{k-2} = 0$, u. s. w. und überhaupt $A_{k+i} + A_{k-i} = 0$, oder was dasselbe ist: $A_{i+k} + A_{i-k} = 0$. Denn die durch $\Sigma A_{k+i} \cos iu$ ausgedrückte Reihe ist:

$$A_k + (A_{k+1} + A_{k-1}) \cos u + (A_{k+2} + A_{k-2}) \cos 2u + \ldots$$

Dasselbe folgt auch aus $\Sigma i A_{k+i} \sin iu = 0$, ausgenommen, dass nicht nothwendig auch $A_k = 0$ ist.

Aus $\Sigma A_{k+i} \sin iu$ sowohl, als aus $\Sigma i A_{k+i} \cos iu = 0$, folgt ... $A_{k+i} - A_{k-i} = 0$, für jeden Werth, von i.

Aus $\Sigma A_i \cos iu = \Sigma B_{i+l} \cos iu$ folgt:

$$2A_i = B_{i+l} + B_{i-l};$$

aus $\Sigma i A_i \sin iu = \Sigma B_{i+l} \sin iu$ folgt:

$$2iA_i = B_{i+l} - B_{i-l}; \text{ u. s. w.}$$

§. 156.

Wir wollen jetzt zu der in §. 154. entwickelten Formel

(1) $U^{-s} = \frac{1}{2}\Sigma\mathfrak{A}_i \cos iu$, wo

(2) $U = a^2 - 2aa' \cos u + a'^2$ ist,

zurückkehren und das Gesetz zu bestimmen suchen, nach welchem die Coefficienten $\mathfrak{A}$ derselben von einander abhängen. Zu dem Ende werde, wenn s in $s+1$ übergeht, $\mathfrak{B}_i$ statt $\mathfrak{A}_i$ gesetzt, so dass

(3) $U^{-s-1} = \frac{1}{2}\Sigma\mathfrak{B}_i \cos iu$.

Es folgt hieraus $\frac{1}{2}\Sigma\mathfrak{A}_i \cos iu = \frac{1}{2} U\Sigma\mathfrak{B}_i \cos iu$

$= \frac{1}{2}(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos u)\, \Sigma\mathfrak{B}_i \cos iu$.

Nun ist $\cos u\Sigma\mathfrak{B}_i \cos iu = \Sigma\mathfrak{B}_i \cos (i+1)\, u$ nach III. a. des vorigen §.,

$= \Sigma\mathfrak{B}_{i-1} \cos iu$ nach I.,

und daher

$\frac{1}{2}\Sigma\mathfrak{A}_i \cos iu = \frac{1}{2}\Sigma\left[(a^2 + a'^2)\,\mathfrak{B}_i - 2aa'\mathfrak{B}_{i-1}\right] \cos iu$;

folglich nach IV.

(4) $\mathfrak{A}_i = (a^2 + a'^2)\,\mathfrak{B}_i - aa'\,(\mathfrak{B}_{i-1} + \mathfrak{B}_{i+1})$.

Man hat ferner durch Differentiation

(5) $d\,.\,U^{-s} = -\,sdU\,.\,U^{-s-1}$,

und wenn man (1) und (2) nach u differentiirt:

$\frac{d\,.\,U^{-s}}{du} = -\,\frac{1}{2}\Sigma i\mathfrak{A}_i \sin iu$, $\frac{dU}{du} = 2aa' \sin u$;

folglich $\frac{1}{2}\Sigma i\mathfrak{A}_i \sin iu = saa' \sin u\Sigma\mathfrak{B}_i \cos iu$

$= saa'\Sigma\mathfrak{B}_i \sin (i+1)\, u$ nach III. c.

$= saa'\Sigma\mathfrak{B}_{i-1} \sin iu$ nach I.; folglich nach IV.

(6) $i\mathfrak{A}_i = saa'\,(\mathfrak{B}_{i-1} - \mathfrak{B}_{i+1})$.

Durch Elimination von $\mathfrak{A}_i$ aus (4) und (6) erhält man nun eine Gleichung zwischen den Coefficienten $\mathfrak{B}$ allein:

(7) $(i+s)\, aa'\mathfrak{B}_{i-1} + (i-s)\, aa'\mathfrak{B}_{i+1} = i\,(a^2 + a'^2)\,\mathfrak{B}_i$,

und weil $\mathfrak{A}_i$ auf dieselbe Weise von a, a', i und s abhängt, wie $\mathfrak{B}_i$ von a, a', i und $s+1$:

(8) $(i+s-1)\, aa'\mathfrak{A}_{i-1} + (i-s+1)\, aa'\mathfrak{A}_{i+1}$

$= i\,(a^2 + a'^2)\,\mathfrak{A}_i$,

welches die gesuchte Relation zwischen den Coefficienten $\mathfrak{A}$ ist.

Zusätze. *a*. Eben so, wie in (4) und (6) die Coefficienten $\mathfrak{A}$ durch die Coefficienten $\mathfrak{B}$, so können auch umgekehrt letztere durch erstere ausgedrückt werden. Denn aus (6) und (4) in Verbindung folgt:

$$(9)\quad (i+s)\,\mathfrak{A}_i = s\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{B}_i - 2saa'\mathfrak{B}_{i+1},$$

$$(10)\quad (i-s)\,\mathfrak{A}_i = -\,s\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{B}_i + 2saa'\mathfrak{B}_{i-1},$$

oder, wenn man in (10), $i+1$ statt i setzt:

$$(11)\quad (i-s+1)\,\mathfrak{A}_{i+1} = -\,s\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{B}_{i+1} + 2saa'\mathfrak{B}_i,$$

und nach Elimination von $\mathfrak{B}_{i+1}$ aus (9) und (11):

$$(12)\quad (i+s)\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{A}_i - (i-s+1)\,2aa'\mathfrak{A}_{i+1} = s\,(a'^2-a^2)^2\,\mathfrak{B}_i,$$

oder, wenn man i in $-i$ verwandelt:

$$(13)\quad -(i-s)\,(a^2+a'^2)\,\mathfrak{A}_i + (i+s-1)\,2aa'\mathfrak{A}_{i-1} = s\,(a'^2-a^2)^2\,\mathfrak{B}_i \text{ (vor. §. II.)}.$$

b. Differentiirt man (1) und (2) noch nach a, so kommt:

$$\frac{d\,.\,U^{-s}}{da} = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{d\mathfrak{A}_i}{da}\cos iu,\quad \frac{dU}{da} = 2\,(a - a'\cos u),$$

und die Gleichung (5) wird:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{d\mathfrak{A}_i}{da}\cos iu = -\,s\,(a - a'\cos u)\,\Sigma\mathfrak{B}_i\cos iu$$
$$= -\,sa\Sigma\mathfrak{B}_i\cos iu + sa'\Sigma\mathfrak{B}_{i-1}\cos iu;$$

folglich nach IV.:

$$(14)\quad \frac{d\mathfrak{A}_i}{da} = -\,2sa\mathfrak{B}_i + sa'\,(\mathfrak{B}_{i-1} + \mathfrak{B}_{i+1}).$$

Es folgt hieraus, das einemal in Verbindung mit (6):

$$(15)\quad \frac{i\mathfrak{A}_i}{a} + \frac{d\mathfrak{A}_i}{da} = 2sa'\mathfrak{B}_{i-1} - 2sa\mathfrak{B}_i,$$

und das anderemal in Verbindung mit (4):

$$s\mathfrak{A}_i + \frac{ad\mathfrak{A}_i}{da} = s\,(a'^2 - a^2)\,\mathfrak{B}_i,$$

und wenn man in letzterer Formel für $\mathfrak{B}_i$ seinen Werth aus (13) setzt:

$$(16)\quad a(a'^2-a^2)\frac{d\mathfrak{A}_i}{da} = 2(i+s-1)\,aa'\mathfrak{A}_{i-1} - ((i-2s)a^2 + ia'^2)\,\mathfrak{A}_i.$$

c. Auf gleiche Art, wie (14), findet sich, wenn man (1) und (2) nach a' differentiirt:

$$(17)\quad \frac{d\mathfrak{A}_i}{da'} = -2sa'\mathfrak{B}_i + sa\,(\mathfrak{B}_{i-1} + \mathfrak{B}_{i+1}).$$

Aus (14) und (17) aber folgt mit Berücksichtigung von (4):

$$(18)\quad a\,\frac{d\mathfrak{A}_i}{da} + a'\,\frac{d\mathfrak{A}_i}{da'} = -2s\mathfrak{A}_i,$$

eine Gleichung, die auch schon aus dem bekannten Lehrsatze von homogenen Functionen fliesst, indem, zu Folge der Gleichungen (1) und (2), $\mathfrak{A}_i$ eine homogene Function der Grössen a und a' von der Dimension $-2s$ ist.

§. 157.

Man setze jetzt $s = \frac{1}{2}$ und schreibe für diesen speciellen Werth von s, A und B statt der vorigen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Die Gleichungen (7), (8), (12) und (13) des vorigen §. gehen damit über in:

$$[1]\quad (2i+1)\,aa'\mathrm{B}_{i-1} + (2i-1)\,aa'\mathrm{B}_{i+1} = 2i\,(a^2+a'^2)\,\mathrm{B}_i,$$
$$[2]\quad (2i-1)\,aa'\mathrm{A}_{i-1} + (2i+1)\,aa'\mathrm{A}_{i+1} = 2i\,(a^2+a'^2)\,\mathrm{A}_i,$$
$$[3]\quad (2i+1)\,[(a^2+a'^2)\,\mathrm{A}_i - 2aa'\mathrm{A}_{i+1}] = (a'^2-a^2)^2\,\mathrm{B}_i,$$
$$[4]\quad (2i-1)\,[2aa'\mathrm{A}_{i-1} - (a^2+a'^2)\,\mathrm{A}_i] = (a'^2-a^2)^2\,\mathrm{B}_i.$$

Ferner folgt aus §. 154. für $s = \frac{1}{2}$:

$$\mathrm{A}_0 = \frac{2}{a'}\left[1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 b^2 + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 b^4 + \left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 b^6 + \ldots\right]$$
$$\mathrm{A}_1 = \frac{2b}{a'}\left[\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \tfrac{3}{4} b^2 + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 \tfrac{5}{6} b^4 + \left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \tfrac{7}{9} b^6 + \ldots\right].$$

Beide Reihen sind convergent, also summirbar, wenn $b = \frac{a}{a'}$ ein ächter Bruch ist. Man lasse daher bei Summirung dieser Reihen a die mittlere Entfernung des der Sonne nähern, a' die des entferntern der zwei Planeten m und m' bedeuten.

Hat man somit die Werthe von A_0 und A_1 berechnet, so finden sich die von A_2, A_3, … ohne Schwierigkeit durch [2]. Denn setzt man darin $i = 1, 2, \ldots$, so kommt

$$\mathrm{A}_2 = [2\,(a^2+a'^2)\,\mathrm{A}_1 - aa'\mathrm{A}_0] : 3aa',$$
$$\mathrm{A}_3 = [4\,(a^2+a'^2)\,\mathrm{A}_2 - 3aa'\mathrm{A}_1] : 5aa', \text{ u. s. w.}$$

Hiermit kann man weiter durch Anwendung der Formel [3] oder [4] die Coefficienten B berechnen, und man hat nach diesem Allen:

$$\frac{1}{\varrho} = U^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\Sigma A_i \cos iu = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots$$

$$\frac{1}{\varrho^3} = U^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\Sigma B_i \cos iu = \tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cos u + B_2 \cos 2u + \ldots$$

Dass auch die Reihe A_0, A_1, A_2, ... convergirt, erhellet leicht aus der in §. 154. für U^{-s} gegebenen Entwickelung. Langsamer, als diese, convergirt die Reihe B_0, B_1, B_2, ..., und jede der beiden Reihen desto langsamer, je weniger der Bruch b von der Einheit übertroffen wird.

Man findet diese Reihen bereits berechnet in Laplace Méc. cél., Tome III. pag. 66—85. Hiernach sind z. B. für Venus und Erde, als für welche zwei Planeten der Bruch b, $= 0,723$, der Einheit am nächsten kommt, die mit der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne multiplicirten Werthe von A_0, A_1, A_2, ... $= 2,386$; $0,942$; $0,528$; $0,323$; $0,207$; $0,136$; $0,090$; $0,061$; $0,042$; etc. Dagegen sind für Merkur und Saturn, wo $b = 0,041$ ist, die in die Entfernung Saturns multiplicirten Werthe von A_0, A_1, A_2 $=$ $2,001$; $0,041$; $0,001$.

Zusatz. In dem Folgenden haben wir noch die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dA_i}{da}$, $\frac{dA_i}{da'}$ und $\frac{d^2A_i}{da^2}$ zu wissen nöthig. Unter der Voraussetzung, dass die Werthe von A_i und B_i gefunden worden, ergeben sich die zwei erstern, wenn man in (14), (15) oder (16), und in (18) des vorigen §. $s = \frac{1}{2}$ setzt, nämlich

$$[5]\quad \frac{dA_i}{da} = -aB_i + \tfrac{1}{2}a'(B_{i-1} + B_{i+1}),$$

$$[6]\quad \frac{iA_i}{a} + \frac{dA_i}{da} = a'B_{i-1} - aB_i;$$

$$[7]\quad a\frac{dA_i}{da} + a'\frac{dA_i}{da'} = -A_i.$$

Ferner kommt, wenn man in (16) $s = \frac{3}{2}$ und damit $\mathfrak{A} = B$ setzt:

$$[8]\quad a(a'^2 - a^2)\frac{dB_i}{da} = (2i+1)aa'B_{i-1} - [(i-3)a^2 + ia'^2]B_i.$$

Hiernach kann man $\frac{d^2A_i}{da^2}$ dadurch finden, dass man [5] noch einmal nach a differentiirt, und für die dadurch entstehenden Differentialqnotienten von B nach a ihre Werthe aus [8] substituirt.

So wird für $i = 0 \ldots \frac{dA_0}{da} = -aB_0 + a'B_1$, folglich

$$\frac{d^2A_0}{da^2} = -B_0 - a\frac{dB_0}{da} + a'\frac{dB_1}{da}.$$

Nach [8] ist aber

$$a(a'^2 - a^2)\frac{dB_0}{da} = aa'B_1 + 3a^2B_0,$$

$$a(a'^2 - a^2)\frac{dB_1}{da} = 3aa'B_0 + (2a^2 - a'^2)B_1.$$

Hiermit findet sich

$$[9] \quad a'\frac{dB_1}{da} - a\frac{dB_0}{da} = 3B_0 - \frac{a'}{a}B_1$$

und folglich

$$[10] \quad \frac{d^2A_0}{da^2} = 2B_0 - \frac{a'}{a}B_1.$$

— Für $i = 1$ wird

$$\frac{dA_1}{da} = -aB_1 + \tfrac{1}{2}a'(B_0 + B_2),$$

oder weil nach [1]

$$[1^*] \quad aa'B_2 = 2(a^2 + a'^2)B_1 - 3aa'B_0 \text{ ist:}$$

$$\frac{dA_1}{da} = \frac{a'^2}{a}B_1 - a'B_0, \text{ und daher}$$

$$\frac{d^2A_1}{da^2} = \frac{a'}{a}\left(a'\frac{dB_1}{da} - a\frac{dB_0}{da}\right) - \frac{a'^2}{a^2}B_1,$$

$$= 3\frac{a'}{a}B_0 - 2\frac{a'^2}{a^2}B_1 \text{ nach [9],}$$

welches sich mit [1*] auf

$$[11] \quad \frac{d^2A_1}{da^2} = 2B_1 - \frac{a'}{a}B_2 \text{ reducirt.}$$

Die numerischen Werthe dieser und noch höherer Differentialquotienten sind a. a. O. der Méc. cél. gleichfalls angegeben.

§. 158.

Wir nehmen jetzt den in §. 153. verlassenen Faden unserer Untersuchung, die von den Excentricitäten unabhängigen Störungen betreffend, wieder auf und substituiren, um zunächst die Störungen des Radius Vector und der Länge zu erhalten, in den dortigen Ausdrücken für P und Q die im vorigen §. für ϱ^{-3} gefundene Reihe. Dies giebt:

$$P = \tfrac{1}{2}(a' \cos u - a)\,\Sigma B_i \cos iu - a'^{-2} \cos u$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma(a'B_{i-1} - aB_i)\cos iu - a'^{-2}\cos u,$$
$$Q = -\tfrac{1}{2}a' \sin u \Sigma B_i \cos iu + a'^{-2} \sin u$$
$$= -\tfrac{1}{2}\Sigma a' B_{i-1} \sin iu + a'^{-2} \sin u,$$

(vergleiche §. 156.) und mit Anwendung der Formel [6]:

$$P = \tfrac{1}{2}\Sigma\left(\frac{iA_i}{a} + \frac{dA_i}{da}\right)\cos iu - \frac{1}{a'^2}\cos u,$$
$$Q = -\tfrac{1}{2}\Sigma\left(aB_i + \frac{iA_i}{a} + \frac{dA_i}{du}\right)\sin iu + \frac{1}{a'^2}\sin u;$$

oder, weil $\Sigma iA_i \cos iu$, $\Sigma B_i \sin iu$ und $\Sigma \frac{dA_i}{da} \sin iu$ null sind (§. 155. II.):

$$P = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{dA_i}{da}\cos iu - \frac{1}{a'^2}\cos u,$$
$$Q = -\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{iA_i}{a}\sin iu + \frac{1}{a'^2}\sin u,$$

d. i.

$$P = \tfrac{1}{2}\frac{dA_0}{da} + \left(\frac{dA_1}{da} - \frac{1}{a'^2}\right)\cos u + \frac{dA_2}{da}\cos 2u + \ldots,$$
$$Q = -\left(\frac{A_1}{a} - \frac{1}{a'^2}\right)\sin u - \frac{2A_2}{a}\sin 2u - \frac{3A_3}{a}\sin 3u + \ldots$$

Man setze daher, um diese Ausdrücke noch etwas mehr zu vereinfachen:

$$A_0 = \mathcal{A}_0,\ A_1 - \frac{a}{a'^2} = \mathcal{A}_1,\ A_2 = \mathcal{A}_2,\ A_3 = \mathcal{A}_3,\ \text{etc.}$$

also auch

$$\frac{dA_0}{da} = \frac{d\mathcal{A}_0}{da},\ \frac{dA_1}{da} - \frac{1}{a'^2} = \frac{d\mathcal{A}_1}{da},\ \frac{dA_2}{da} = \frac{d\mathcal{A}_2}{da},\ \text{etc.}$$

Denn hiermit wird

$$P = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{d\mathcal{A}_i}{da}\cos iu,\quad Q = -\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{i\mathcal{A}_i}{a}\sin iu,$$

und man hat zuletzt (§. 152.):

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \tfrac{1}{2} m' a^2 \Sigma \frac{dA_i}{da} \cos iu,$$

$$V_1 = -\tfrac{1}{2} m' a \Sigma i A_i \sin iu,$$

oder, wenn von jetzt an für i bloss alle positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... genommen werden:

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \tfrac{1}{2} m' a^2 \frac{dA_0}{da} + m' a^2 \Sigma \frac{dA_i}{da} \cos iu,$$

$$V_1 = - m' a \Sigma i A_i \sin iu.$$

Aus diesen Ausdrücken für die Kräfte, welche auf den Planeten m in der Ebene seiner Bahn wirken, lassen sich aber seine Coordinaten r und l unmittelbar durch die bereits in §. 112. entwickelten allgemeinen Formeln ableiten, nach denen bei einer sehr nahe kreis- und gleichförmigen durch die Kräfte

$$T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + \tfrac{1}{2} w + w \Sigma F_i \cos \lambda_i \text{ und}$$

$$V_1 = w \Sigma G_i \sin \lambda_i$$

erzeugten Bewegung die Coordinaten

$$\frac{r}{a} = 1 - \tfrac{1}{6} w + w \Sigma f_i \cos \lambda_i \text{ und } l = \lambda + w \Sigma g_i \sin \lambda_i \text{ sind,}$$

wo

$$f_i = -\frac{k_i F_i - 2G_i}{k_i (k_i^2 - 1)} \text{ und } g_i = \frac{2 k_i F_i - (3 + k_i^2) G_i}{k_i^2 (k_i^2 - 1)} \text{ ist.}$$

Denn vergleichen wir die letztern Ausdrücke von T_1 und V_1 mit den vorhergehenden, so sind die in den letztern vorkommenden

$$w = m' a^2 \frac{dA_0}{da}, \quad w F_i = m' a^2 \frac{dA_i}{da},$$

$$w G_i = - m' a i A_i, \quad \lambda_i = iu.$$

Heisst ferner n' die mittlere Bewegung von m' und wird $n - n' = kn$ gesetzt, so ist von $\lambda - \lambda'$ oder u die Geschwindigkeit $= n - n' = kn$, also die von iu, $= ikn$, und folglich, weil in §. 112. von λ_i die Geschwindigkeit $= k_i n$ gesetzt wurde, das dortige $k_i = ik$. Endlich werde statt der dortigen wf_i und wg_i hier $m' C_i$ und $m' F_i$ geschrieben.

Nach Substitution dieser Werthe von w, wF_i, wG_i, λ_i, k_i, wf_i und wg_i in den dortigen Ausdrücken für r und l,

erhält man als endliches Resultat für die von der Excentricität unabhängigen Störungen des Radius Vector und der Länge:

$$\frac{r}{a} = 1 - \tfrac{1}{6} m' a^2 \frac{dA_0}{da} + m' \Sigma C_i \cos iu,$$

$$l = \lambda + m' \Sigma F_i \sin iu, \text{ wo}$$

$$C_i = -\frac{2aA_i + ka^2 \frac{dA_i}{da}}{k(i^2k^2 - 1)} \quad \text{und} \quad F_i = \frac{(i^2k^2 + 3)\, aA_i + 2ka^2 \frac{dA_i}{da}}{ik^2 (i^2k^2 - 1)}$$

ist; oder, wenn für i wieder sowohl alle negativen, als positiven ganzen Zahlen genommen werden:

$$\frac{r}{a} = 1 + \tfrac{1}{2} m' \Sigma C_i \cos iu \quad \text{und} \quad l = \lambda + \tfrac{1}{2} m' \Sigma F_i \sin iu,$$

mit der Erinnerung, dass C_0 nicht aus dem allgemeinen Ausdrucke für C_i zu bestimmen, sondern $= -\tfrac{1}{3} a^2 \frac{dA_0}{da}$ ist.

Des Folgenden willen werde noch bemerkt, dass die Formel in §. 112. — $2k_i f_i - k_i^2 g_i = G_i$, in die jetzigen Zeichen übersetzt, die Relation

$$2kC_i + ik^2 F_i = aA_i \text{ giebt.}$$

Zweites Kapitel.

Entwickelung der von den Excentricitäten und der Neigung abhängigen Störungen.

§. 159.

Die Entwickelung der Störungen, welche m' auf m ausübt, fängt nach der in §. 153. gemachten Bemerkung damit an, dass in den Formeln, welche in §. 152. für die Kräfte T_1, V_1, W_1 aufgestellt wurden, die Grössen P, Q, R, welche Functionen der Coordinaten von m und m' sind, durch die elliptischen Werthe dieser Coordinaten ausgedrückt werden. Statt dieser elliptischen Werthe wurden im vorigen Kapitel

die mittleren Werthe a, λ, a', λ' der Coordinaten r, l, r', l' angewendet und damit

$$(1) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{2}\Sigma\frac{dA_i}{da}\cos iu \\ Q = -\frac{1}{2}\Sigma\frac{iA_i}{a}\sin iu \end{cases}$$

gefunden, worin A_i eine Function von a, a' und der Stellenzahl i, und $u = \lambda - \lambda'$ ist.

Bezeichnet man nun die Grössen P und Q, wenn sie Functionen der elliptischen Coordinaten sind, durch (P) und (Q) und gebraucht P und Q selbst in der ihnen durch die Gleichungen (1) angewiesenen Bedeutung, so ist zuerst klar, dass (P) und (Q) in P und Q übergehen, wenn man in erstern statt der elliptischen Coordinaten ihre mittlern Werthe setzt. Da aber die Coordinaten r, l, r', l' von einander unabhängig sind, so wird man auch umgekehrt die jetzt zu wissen nöthigen (P) und (Q) aus P und Q erhalten, wenn man in letztern die mittlern Werthe der Coordinaten in ihre elliptischen verwandelt. Die deshalb nöthige Rechnung lässt sich folgendergestalt am einfachsten ausführen.

Heissen e und e' die Excentricitäten und ω und ω' die Längen der Perihelien von m und m', und setzt man

$$\lambda - \omega = \alpha \text{ und } \lambda' - \omega' = \alpha',$$

so sind bis auf die ersten Potenzen von e und e' genau die elliptischen Werthe der Coordinaten

$$r = a\,(1 - e\cos\alpha), \quad l = \lambda + 2e\sin\alpha,$$
$$r' = a'\,(1 - e'\cos\alpha'), \quad l' = \lambda' + 2e'\sin\alpha',$$

oder wenn man

$$-ae\cos\alpha = x, \quad 2e\sin\alpha = y,$$
$$-a'e'\cos\alpha' = x', \quad 2e'\sin\alpha' = y' \text{ setzt:}$$
$$r = a + x, \; l = \lambda + y, \; r' = a' + x', \; l' = \lambda' + y'.$$

Hiernach wird man (P) und (Q) finden, wenn man in den durch (1) bestimmten P und Q die mittlern Werthe a, λ, a', λ' resp. um x, y, x', y' wachsen lässt. Dies giebt:

$$(P) = P + x\frac{dP}{da} + y\frac{dP}{d\lambda} + x'\frac{dP}{da'} + y'\frac{dP}{d\lambda'},$$

$$(Q) = Q + x\frac{dQ}{da} + y\frac{dQ}{d\lambda} + x'\frac{dQ}{da'} + y'\frac{dQ}{d\lambda'}.$$

Aus (1) folgt aber

$$\frac{dP}{da} = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{d^2A_i}{da^2}\cos iu, \quad \frac{dP}{d\lambda} = -\tfrac{1}{2}\Sigma i\frac{dA_i}{da}\sin iu,$$

$$\frac{dP}{da'} = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{d^2A_i}{da\,da'}\cos iu, \quad \frac{dP}{d\lambda'} = \tfrac{1}{2}\Sigma i\frac{dA_i}{da}\sin iu.$$

Mithin ist (§. 155. III.)

$$x\frac{dP}{da} = -\tfrac{1}{2}ae\Sigma\frac{d^2A_i}{da^2}\cos(iu+\alpha),$$

$$y\frac{dP}{d\lambda} = e\Sigma i\frac{dA_i}{da}\cos(iu+\alpha),$$

$$x'\frac{dP}{da'} = -\tfrac{1}{2}a'e'\Sigma\frac{d^2A_i}{da\,da'}\cos(iu+\alpha'),$$

$$y'\frac{dP}{d\lambda'} = -e'\Sigma i\frac{dA_i}{da}\cos(iu+\alpha').$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(2)\quad\begin{cases}(2i+1)A_i - a\dfrac{dA_i}{da} = M_i \text{ und}\\ -2iA_i - a'\dfrac{dA_i}{da'} = N_{i-1}, \text{ woraus}\end{cases}$$

$$(2^*)\quad\begin{cases}2i\dfrac{dA_i}{da} - a\dfrac{d^2A_i}{da^2} = \dfrac{dM_i}{da} \text{ und}\\ -2i\dfrac{dA_i}{da} - a'\dfrac{d^2A_i}{da\,da'} = \dfrac{dN_{i-1}}{da} \text{ folgt, so wird}\end{cases}$$

$$(P) = \tfrac{1}{2}\Sigma\left\{\frac{dA_i}{da}\cos iu + e\frac{dM_i}{da}\cos(iu+\alpha) + e'\frac{dN_{i-1}}{da}\cos(iu+\alpha')\right\}.$$

Auf ähnliche Weise wird man mit Hülfe der partiellen Differenzen von Q:

$$\frac{dQ}{da} = \tfrac{1}{2}\Sigma i\left(\frac{A_i}{a^2} - \frac{dA_i}{a\,da}\right)\sin iu, \text{ u. s. w.}$$

erhalten:

$$(Q) = -\frac{1}{2a}\Sigma i\left\{A_i\sin iu + eM_i\sin(iu+\alpha) + e'N_{i-1}\sin(iu+\alpha')\right\}.$$

Des Folgenden willen setze man noch

$$u + \alpha' = (\lambda - \lambda') + (\lambda' - \omega') = \lambda - \omega' = \beta.$$

Das Glied $\frac{1}{2}\Sigma e' \frac{dN_{i-1}}{da} \cos(iu + \alpha')$ in (P) wird dadurch $= \frac{1}{2}\Sigma e' \frac{dN_{i-1}}{da} \cos((i-1)u + \beta)$

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma e' \frac{dN_i}{da} \cos(iu + \beta),$$

und eben so das entsprechende Glied in (Q),

$$= -\frac{1}{2a}\Sigma(i+1)\, e' N_i \sin(iu + \beta).$$

Man erhält somit zuletzt:

$$(3) \,..\, T_1 = -\frac{a^2}{r^2} + m'a^2(P)$$

$$= -\frac{a^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}m'a^2\Sigma\left\{\frac{dA_i}{da}\cos iu + e\frac{dM_i}{da}\cos(iu+\alpha) + e'\frac{dN_i}{da}\cos(iu+\beta)\right\},$$

$$(4) \,..\, V_1 = m'a^2(Q) = -\tfrac{1}{2}m'a\Sigma\left\{iA_i \sin iu + eiM_i \sin(iu+\alpha) + e'(i+1)N_i \sin(iu+\beta)\right\}.$$

§. 160.

Den jetzt gefundenen Werthen von T_1 und V_1 gemäss können wir die gestörten elliptischen Werthe des Radius Vector und der Länge von m setzen (vergl. §. 158. und §. 118.):

$$r = a(1 + z), \text{ wo}$$

$$z = -e\cos\alpha + m'\Sigma\left\{\tfrac{1}{2}C_i \cos iu + eD_i \cos(iu+\alpha) + e'E_i \cos(iu+\beta)\right\},$$

$$l = \lambda + 2e\sin\alpha + m'\Sigma\left\{\tfrac{1}{2}F_i \sin iu + eG_i \sin(iu+\alpha) + e'H_i \sin(iu+\beta)\right\},$$

wo C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i zu bestimmende Functionen von a, a' und der Stellenzahl i sind. — Zunächst folgt hieraus

$$z^2 = -m'e\cos\alpha\Sigma C_i \cos iu = -m'e\Sigma C_i \cos(iu+\alpha),$$

also

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2z + 3z^2 = 1 + 2e\cos\alpha - m'\Sigma\Big\{C_i\cos iu$$
$$+ e\,(3C_i + 2D_i)\cos(iu+\alpha) + 2e'E_i\cos(iu+\beta)\Big\},$$

nnd damit

$$(3^*)\,..\ T_1 = -1 - 2e\cos\alpha + m'\Sigma\Big\{\Big(\frac{a^2}{2}\frac{dA_i}{da} + C_i\Big)\cos iu$$
$$+ e\Big(\frac{a^2}{2}\frac{dM_i}{da} + 3C_i + 2D_i\Big)\cos(iu+\alpha)$$
$$+ e'\Big(\frac{a^2}{2}\frac{dN_i}{da} + 2E_i\Big)\cos(iu+\beta)\Big\}.$$

Sodann kommt durch Differentiation von r und l, wenn wir die Geschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dl}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$, $\frac{d^2l}{dt^2}$, wie früher, mit r', l', r'', l'' bezeichnen nnd, wie in §. 158., $n - n' = kn$ und überdiess $ik + 1 = g$ setzen, wodurch $\frac{diu}{dt} = ikn$ und, wegen $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = n$,

$$\frac{d\,(iu+\alpha)}{dt} = \frac{d\,(iu+\beta)}{dt} = gn \text{ wird:}$$

$$\frac{r'}{na} = e\sin\alpha - m'\Sigma\Big\{\tfrac{1}{2}ikC_i\sin iu + egD_i\sin(iu+\alpha)$$
$$+ e'gE_i\sin(iu+\beta)\Big\},$$

$$\frac{l'}{n} = 1 + 2e\cos\alpha + m'\Sigma\Big\{\tfrac{1}{2}ikF_i\cos iu + egG_i\cos(iu+\alpha)$$
$$+ e'gH_i\cos(iu+\beta)\Big\},$$

$$\frac{l'^2}{n^2} = 1 + 4e\cos\alpha + m'\Sigma\Big\{ikF_i\cos iu + 2e\,(ikF_i + gG_i)\cos(iu+\alpha)$$
$$+ 2e'gH_i\cos(iu+\beta)\Big\},$$

$$\frac{l''}{n^2} = -\ 2e\sin\alpha - m'\Sigma\Big\{\tfrac{1}{2}i^2k^2F_i\sin iu + eg^2G_i\sin(iu+\alpha)$$
$$+ e'g^2H_i\sin(iu+\beta)\Big\};$$

und wenn wir von jetzt an bloss diejenigen Glieder hinschreiben, welche $m'e$ oder $m'e'$ zum Factor erhalten:

$$\frac{r''}{n^2a} = -\ m'\Sigma\Big\{eg^2D_i\cos(iu+\alpha) + e'g^2E_i\cos(iu+\beta)\Big\},$$

$$\frac{rl'^2}{n^2a} = m'e\Sigma(2C_i + D_i + ikF_i + 2gG_i)\cos(iu+\alpha) + m'e'\Sigma(E_i + 2gH_i)\cos(iu+\beta),$$

$$\frac{rl''}{n^2a} = -m'e\Sigma(C_i - \tfrac{1}{2}i^2k^2F_i + g^2G_i)\sin(iu+\alpha) - m'e'\Sigma g^2H_i\sin(iu+\beta),$$

$$\frac{r'l'}{n^2a} = -m'e\Sigma(ikC_i + gD_i - \tfrac{1}{2}ikF_i)\sin(iu+\alpha) - m'e'\Sigma gE_i\sin(iu+\beta).$$

Die Kräfte, wie sie aus den für r und l angenommenen Formen folgen, sind hiernach

$$(5)\begin{cases} T_1 = \dfrac{-rl'^2 + r''}{n^2a} = -m'e\Sigma(2C_i + (g^2+1)D_i + ikF_i + 2gG_i) \\ \quad \cos(iu+\alpha) - m'e'\Sigma((g^2+1)E_i + 2gH_i)\cos(iu+\beta), \\ V_1 = \dfrac{2r'l' + rl''}{n^2a} = -m'e\Sigma((2ik+1)C_i + 2gD_i - ik(\tfrac{1}{2}ik+1)F_i \\ \quad + g^2G_i)\sin(iu+\alpha) - m'e'\Sigma(2gE_i + g^2H_i)\sin(iu+\beta). \end{cases}$$

Zu diesen Werthen von T_1 und V_1 kommen noch die von den Excentricitäten unabhängigen Glieder, welche iu zu Argumenten haben, und ausserdem noch zu T_1 die Glieder $-1 - 2e\cos\alpha$ (vergl. §. 119.).

§. 161.

Vergleichen wir nun die so vervollständigt zu denkenden Werthe von T_1 und V_1 mit denen in (3*) und (4), so werden sich erstens aus den von e und e' unabhängigen Gliedern die zur Bestimmung von C_i und F_i nöthigen Gleichungen finden, wobei wir uns aber nicht aufhalten, da diese Coefficienten bereits in §. 158. entwickelt worden sind. Zur Bestimmung der Coefficienten D_i, E_i, G_i, H_i, welche die in e und e' multiplicirten Glieder von r und l enthalten, ergeben sich folgende vier Gleichungen:

$$[1]\quad \tfrac{1}{2}a^2\frac{dM_i}{da} = -5C_i - (g^2+3)D_i - ikF_i - 2gG_i,$$

$$[2]\quad \tfrac{1}{2}iaM_i = (2ik+1)C_i + 2gD_i - ik(\tfrac{1}{2}ik+1)F_i + g^2G_i,$$

$$[3]\quad \tfrac{1}{2}a^2\frac{dN_i}{da} = -(g^2+3)E_i - 2gH_i,$$

$$[4]\quad \tfrac{1}{2}(i+1)aN_i = 2gE_i + g^2H_i.$$

Um hieraus zuerst die mit e multiplicirten Coefficienten D_i und G_i zu finden, setze man in [1] und [2] die als bekannt anzusehenden Grössen

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} a^2 \frac{dM_i}{da} + 5C_i + ikF_i = K, \\ \frac{1}{2} iaM_i - (2ik+1)\, C_i + ik\,(\frac{1}{2} ik + 1)\, F_i = L, \end{cases}$$

und es werden jene Gleichungen

$$[1^*]\quad K = -(g^2+3)\, D_i - 2gG_i,$$

$$[2^*]\quad L = 2gD_i + g^2G_i, \quad \text{wo } g = ik+1.$$

Es ist aber, wenn man in den Gleichungen (2) und (2*) in §. 159. statt $a\,\frac{dA_i}{da}$ seinen aus der Gleichung für C_i in §. 158. fliessenden Werth

$$-\frac{2}{k} A_i - \frac{(i^2k^2-1)\, C_i}{a} \quad \text{setzt:}$$

$$M_i = \frac{2\,(ik+1)+k}{k} A_i + \frac{i^2k^2-1}{a} C_i,$$

$$\frac{dM_i}{da} = -\frac{4i}{ka} A_i - \frac{2i\,(i^2k^2-1)}{a^2} C_i - a\,\frac{d^2A_i}{da^2}.$$

Ferner ist nach §. 158. zu Ende:

$$ik^2F_i = aA_i - 2kC_i.$$

Hiermit werden die Gleichungen (α):

$$K = -\frac{2i-1}{k} aA_i - (i^3k^2 - i - 3)\, C_i - \frac{1}{2} a^3 \frac{d^2A_i}{da^2},$$

$$\frac{L}{ik+1} = \frac{i+1}{k} aA_i + \frac{1}{2}(i^2k - i - 6)\, C_i,$$

und man hat alsdann zu Folge der Gleichungen [1*] und [2*]:

$$\text{I.}\quad [(ik+1)^2 - 1]\, D_i = -K - 2\,\frac{L}{ik+1}$$

$$= -\frac{3a}{k} A_i + (i^2k(ik-1)+3)\, C_i + \frac{1}{2} a^3 \frac{d^2A_i}{da^2},$$

$$\text{II.}\quad (ik+1)\, G_i = \frac{i+1}{k} aA_i + \frac{1}{2}(i\,(ik-1) - 6)\, C_i - 2D_i;$$

wodurch D_i und G_i bestimmt sind.

Was noch die Bestimmung der Coefficienten E_i und H_i anlangt, so folgt aus den Gleichungen [3] und [4]:

$$[(ik+1)^2-1]\,E_i = -\frac{i+1}{ik+1}\,aN_i - \tfrac{1}{2}a^2\frac{dN_i}{da}.$$

Es war aber

$$N_i = -2(i+1)\,A_{i+1} - a'\frac{dA_{i+1}}{da'} \quad (\S.\ 159.\ (2))$$

und nach §. 157. [7]

$$a'\frac{d\mathrm{A}_{i+1}}{da'} + a\frac{d\mathrm{A}_{i+1}}{da} = -\mathrm{A}_{i+1}.$$

Auch ist, wenn man vorübergehend $\frac{a}{a'^2} = \mathfrak{A}$ setzt, wodurch $A_1 = \mathrm{A}_1 - \mathfrak{A}$ wird (§. 158.):

$$a'\frac{d\mathfrak{A}}{da'} + a\frac{d\mathfrak{A}}{da} = -\mathfrak{A}.$$

Mithin ist auch für jeden Werth von i (ebendas.):

$$a'\frac{dA_{i+1}}{da'} + a\frac{dA_{i+1}}{da} = -A_{i+1}.$$

Dies giebt $N_i = -(2i+1)\,A_{i+1} + a\frac{dA_{i+1}}{da}$

und

$$\frac{dN_i}{da} = -2i\frac{dA_{i+1}}{da} + a\frac{d^2A_{i+1}}{da^2}.$$

Hiermit aber findet sich

$$\text{III.}\quad [(ik+1)^2-1]\,E_i = \frac{(i+1)(2i+1)}{ik+1}\,aA_{i+1} + \frac{i^2k-1}{ik+1}\,a^2\frac{dA_{i+1}}{da} - \tfrac{1}{2}a^3\frac{d^2A_{i+1}}{da^2},$$

und nach der Gleichung [4] wird

$$\text{IV.}\quad (ik+1)\,H_i = -\frac{(i+1)\,a}{2\,(ik+1)}\Big[(2i+1)\,A_{i+1} - a\frac{dA_{i+1}}{da}\Big] - 2E_i.$$

Mit diesen Formeln I., .. IV. lassen sich die Werthe von D_i, .. H_i für $i = 1, 2, 3, \ldots$ und $= -1, -2, -3, \ldots$ berechnen, und man hat alsdann die von den Excentricitäten abhängigen Störungen des Radius Vector

$$\begin{aligned} = m'e\,[&D_1\cos(u+\alpha) + D_2\cos(2u+\alpha) + \ldots \\ &+ D_{-1}\cos(u-\alpha) + D_{-2}\cos(2u-\alpha) + \ldots] \\ + m'e'\,[&E_1\cos(u+\beta) + \ldots + E_{-1}\cos(u-\beta) + \ldots] \end{aligned}$$

und die Störungen der Länge

$$= m'e\,[G_1 \sin(u+\alpha) + G_2 \sin(2u+\alpha) + \ldots$$
$$- G_{-1} \sin(u-\alpha) - G_{-2} \sin(2u-\alpha) - \ldots]$$
$$+ m'e'\,[H_1 \sin(u+\beta) + \ldots - H_{-1} \sin(u-\beta) - \ldots].$$

Die Bestimmung der Glieder, für welche $i = 0$ ist, macht eine besondere, dem folgenden Kapitel vorbehaltene, Untersuchung nöthig, da nach den Formeln I., .. IV. die Coefficienten D_i, .. H_i durch Brüche ausgedrückt werden, deren Nenner, $= (ik + 1)^2 - 1$, für $i = 0$ ebenfalls null werden.

---

§. 162.

Es bleibt uns noch übrig die Wirkung der Kraft W zu bestimmen, welche eine auf der Bahnebene von m perpendikulare Richtung hat und daher rührt, dass m und m' sich nicht in derselben Ebene um die Sonne bewegen. Die Wirkung dieser Kraft besteht im Allgemeinen darin, dass die Bahnebene von m in eine schwankende Bewegung gesetzt wird, oder, was dasselbe ist, dass der Planet von einer gewissen mittlern durch die Sonne gehenden Ebene sich bald auf die eine, bald auf die andere Seite entfernt. Indem wir nun ähnlicher Weise, wie beim Monde in §. 136., die letztere Ebene zur Grundebene wählen, setzen wir in Bezug auf sie die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens von m', $= \iota$ und ϑ. Seien ferner die auf dieselbe Ebene bezogenen Breiten von m und m', $= b$ und b', von denen erstere, weil sie sowohl für $m' = 0$, als für $\iota = 0$ verschwindet, von der Ordnung $m'\iota$ sein muss. Für die Breite b' hat man

$$\sin b' = \sin \iota \sin (l' - \vartheta),$$

und wenn man mit m' multiplicirt und Grössen nicht mehr beachtet, die über die Ordnung von $m'\iota$ hinausliegen:

$$m' \sin b' = m'\iota \sin (\lambda' - \vartheta),$$

worin unter b' auch die auf die wirkliche Bahnebene von m bezogene Breite verstanden werden kann, weil der Unterschied zwischen letzterer und der auf die Grundebene bezogenen Breite von m' offenbar von der Ordnung $m'\iota$ ist.

Man setze jetzt noch, wie bei der Mondstheorie in §. 136., die auf m, perpendikular auf der Grundebene, wirkende Kraft, nachdem sie mit $n^2 a$ dividirt worden, $= U_1$, so ist nach den ebendaselbst gemachten Schlüssen $U_1 = -b + W_1 = -b + m'a^2 R$ (§. 152.), also (§. 153.)

$$U_1 = -b + m'a^2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{a'^3}\right) a' \sin b'$$
$$= -b + m'\iota a^2 a' \left(\tfrac{1}{2}\Sigma \mathrm{B}_i \cos iu - a'^{-3}\right) \sin(\lambda' - \vartheta)$$

(§. 157.), oder wenn man $\frac{1}{2}\mathrm{B}_0 - \frac{1}{a'^3} = \frac{1}{2}B_0$, $\mathrm{B}_1 = B_1$, $\mathrm{B}_2 = B_2$, etc. setzt (vergl. §. 158.):

$$U_1 = -b + \tfrac{1}{2} m'\iota a^2 a' \sin(\lambda' - \vartheta)\,\Sigma B_i \cos iu.$$

Es ist aber $\sin(\lambda' - \vartheta)\,\Sigma B_i \cos iu = \Sigma B_i \sin(iu + \lambda' - \vartheta)$
$= \Sigma B_i \sin((i-1)u + \lambda - \vartheta) = \Sigma B_{i+1} \sin(iu + \gamma)$,
wenn man $\lambda - \vartheta = \gamma$ setzt; folglich

$$U_1 = -b + \tfrac{1}{2} m'\iota a^2 a' \Sigma B_{i+1} \sin(iu + \gamma).$$

Man ersieht hieraus, dass b von der Form

$$b = m'\iota \Sigma K_i \sin(iu + \gamma)$$

anzunehmen ist. Dadurch wird das vorige

$$U_1 = m'\iota \Sigma \left(\tfrac{1}{2} a^2 a' B_{i+1} - K_i\right) \sin(iu + \gamma).$$

Geradezu aber folgt aus dieser Form für b die Kraft, welche den Planeten, in perpendikularer Richtung auf der Grundebene, treibt, $= a\frac{d^2 b}{dt^2}$, und damit

$$U_1 = \frac{d^2 b}{n^2 dt^2} = -m'\iota \Sigma (ik + 1)^2 K_i \sin(iu + \gamma).$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke für U_1 giebt:

$$\tfrac{1}{2} a^2 a' B_{i+1} - K_i = -(ik + 1)^2 K_i, \text{ folglich}$$

$$\text{V.}\quad [(ik + 1)^2 - 1]\, K_i = -\tfrac{1}{2} a^2 a' B_{i+1},$$

und es ist, nachdem man damit die Werthe von K_i für $i = 1, 2, 3, ..$ und $-1, -2, -3, \ldots$ berechnet hat:

$$b = m'\iota\,[K_1 \sin(u + \gamma) + K_2 \sin(2u + \gamma) + \ldots$$
$$- K_{-1} \sin(u - \gamma) - K_{-2} \sin(2u - \gamma) - \ldots].$$

Für $i = 0$ wird K_i nach V. unendlich gross, welches nicht sein kann. Die Untersuchung der Modification, welche

deshalb die für b angenommene Form erleiden muss, bleibt für das folgende Kapitel aufgespart.

§. 163.

Wir haben in dem Vorhergehenden die Störungen zu berechnen gelernt, welche ein einzelner Planet im Laufe eines andern hervorbringt, während doch in der Natur jeder Planet von jedem der übrigen zugleich gestört wird. Indessen haben wir deshalb keine neuen Formeln zu entwickeln nöthig, so lange wir uns, wie im Bisherigen, nur auf die erste Potenz der störenden Massen beschränken. Denn so wie man, um den durch m' gestörten Lauf von m zu berechnen, die elliptische Bewegung von m zu Grunde legt und die mit m' multiplicirten Glieder zu bestimmen sucht, die wegen der Störung durch m' zu den elliptischen Coordinaten von m hinzuzufügen sind, so wird man, um die durch m' und m'' gleichzeitig gestörte Bewegung von m zu finden, statt der elliptischen, die durch m' gestörte Bewegung von m als Basis nehmen und die wegen der Störung durch m'' hinzuzufügenden und daher mit m'' multiplicirten Glieder zu berechnen suchen. Vernachlässigt man nun dabei die höheren Potenzen von m' und m'', und damit auch das Product $m'm''$, so könnnen diese letztern Glieder keine andern sein, als welche sich aus der Störung der elliptischen Bewegung von m durch m'' allein ergeben. Dasselbe gilt auch bei jeder grösseren Anzahl störender Massen.

Ueberhaupt also wird man, um den gestörten Lauf eines Planeten zu berechnen, die Störungen, welche jeder der übrigen Planeten für sich hervorbringt, nach den vorhin entwickelten Formeln zu bestimmen und die Summe aller dieser Störungen zu dem elliptischen Orte des erstern hinzuzufügen haben.

Drittes Kapitel.

Theorie der Secularstörungen.

§. 164.

Die Schwierigkeiten, auf welche wir im vorigen Kapitel stiessen, als bei Bestimmung der Ungleichheiten des Radius Vector, der Länge und der Breite die Coefficienten derjenigen Glieder, für welche $i = 0$ ist, und deren Argumente daher α, β (§. 161.) und γ (§. 162.) sind, sich unendlich gross fanden, welches doch nicht sein kann, — diese Schwierigkeiten sind denen ganz ähnlich, welchen wir in der Mondstheorie in §. 125. und §. 138. begegneten, indem wir dort gleichfalls die Coefficienten der Störungsglieder, welche die vom Perigäum und die vom Knoten an gerechnete Länge des Mondes zu Argumenten haben, nicht ohne Weiteres zu bestimmen vermochten. Wir wollen daher versuchen, ob wir die jetzigen Schwierigkeiten auf ähnliche Weise, wie beim Monde, also dadurch werden beseitigen können, dass wir die Apsiden und die Knoten nicht mehr, wie bisher, ruhend, sondern mit constanten Geschwindigkeiten sich bewegend annehmen. Wir wollen mit der Bewegung der Apsiden den Anfang machen und zuerst die zu dieser Bewegung nöthigen Kräfte zu bestimmen suchen.

Werde zu dem Ende

$$(1)\quad e \cos \omega = f \text{ und } e \sin \omega = g$$

gesetzt. Hierdurch werden bei der rein elliptischen Bewegung, — denn wir abstrahiren jetzt von allen übrigen Störungen, — die Coordinaten:

$$r : a = 1 - e \cos(\lambda - \omega) = 1 - f \cos \lambda - g \sin \lambda,$$
$$l = \lambda + 2e \sin(\lambda - \omega) = \lambda + 2f \sin \lambda - 2g \cos \lambda,$$

worin jetzt nicht mehr λ allein, sondern, wegen der Apsidenbewegung, auch noch f und g veränderlich zu nehmen sind. Die Geschwindigkeiten letzterer Aenderungen werden, weil sie sowohl für $m' = 0$, als für $e = 0$ verschwinden, die

Brüche m' und e zu Factoren haben, also von der Ordnung $m'e$ sein.

Indem wir nun diese Geschwindigkeiten, nachdem sie mit n dividirt worden, oder $\frac{df}{ndt}$ und $\frac{dg}{ndt}$, resp. $= f_1$ und g_1 setzen, erhalten wir durch Differentiation von r und l:

$$\frac{dr}{ndt} = (f - g_1) \sin \lambda - (g + f_1) \cos \lambda,$$
$$\frac{dl}{ndt} = 1 + 2(f - g_1) \cos \lambda + 2(g + f_1) \sin \lambda.$$

Weil f_1 und g_1 von der Ordnung $m'e$ sind, so werden die Geschwindigkeiten ihrer Aenderungen, oder $\frac{df_1}{dt}$ und $\frac{dg_1}{dt}$, da diese Aenderungen ebenfalls nur durch m' bewirkt werden können, von der Ordnung m'^2e und folglich hier zu vernachlässigen sein. Es kommt daher, wenn man letztere Gleichungen abermals differentiirt:

$$\frac{d^2r}{n^2ndt^2} = (f - 2g_1) \cos \lambda + (g + 2f_1) \sin \lambda,$$
$$\frac{d^2l}{n^2dt^2} = -2(f - 2g_1) \sin \lambda + 2(g + 2f_1) \cos \lambda.$$

Hieraus folgt, wenn bloss die von der Störung herrührenden, also mit f_1 und g_1 multiplicirten, Glieder berücksichtigt und Producte, wie fg_1 etc., als von der Ordnung e^2m', weggelassen werden:

$$T_1 = \frac{-rdl^2 + d^2r}{n^2ndt^2} = 2g_1 \cos \lambda - 2f_1 \sin \lambda,$$
$$V_1 = \frac{2drdl + rd^2l}{n^2adt^2} = 2g_1 \sin \lambda + 2f_1 \cos \lambda.$$

Dies sind also die Grössen, die man, wegen der Veränderlichkeit von f und g, auf der rechten Seite der Gleichungen (5) in §. 160. noch hinzuzufügen hat. Hierdurch werden jene Gleichungen, wenn man von ihnen bloss die Glieder, in denen $i = 0$ (mithin das dortige $g = 1$) ist, als die hier allein in Betracht kommenden, beibehält:

$$T_1 = -2m'e(C_0 + D_0 + G_0) \cos \alpha - 2m'e'(E_0 + H_0) \cos \beta$$
$$+ 2g_1 \cos \lambda - 2f_1 \sin \lambda,$$
$$V_1 = -m'e(C_0 + 2D_0 + G_0) \sin \alpha - m'e'(2E_0 + H_0) \sin \beta$$
$$+ 2g_1 \sin \lambda + 2f_1 \cos \lambda.$$

Die damit zu vergleichenden Werthe von T_1 und V_1, (3*) in §. 160. und (4) in §. 159., reduciren sich ähnlicher Weise auf

$$T_1 = m'e\left(\frac{a^2}{2}\frac{dM_0}{da} + 3C_0 + 2D_0\right)\cos\alpha + m'e'\left(\frac{a^2}{2}\frac{dN_0}{da} + 2E_0\right)\cos\beta$$
$$V_1 = -\tfrac{1}{2}m'e'aN_0 \sin\beta.$$

Die Gleichsetzung dieser doppelten Ausdrücke für T_1 und V_1, — denn alle übrigen hier weggelassenen Glieder sind bereits ausgeglichen worden, — giebt, wenn man zur Abkürzung

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{a^2}{2}\frac{dM_0}{da} + 5C_0 + 4D_0 + 2G_0 = D, \\ \frac{a^2}{2}\frac{dN_0}{da} + 4E_0 + 2H_0 = E, \\ C_0 + 2D_0 + G_0 = G, \\ -\frac{1}{2}aN_0 + 2E_0 + H_0 = H \end{cases}$$

setzt und für α und β ihre Werthe $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ schreibt:

$$m'eD\cos(\lambda-\omega) + m'e'E\cos(\lambda-\omega') = 2g_1\cos\lambda - 2f_1\sin\lambda,$$
$$m'eG\sin(\lambda-\omega) + m'e'H\sin(\lambda-\omega') = 2g_1\sin\lambda + 2f_1\cos\lambda.$$

Jede dieser beiden Gleichungen kann auf die Form $A\cos\lambda = B\sin\lambda$ gebracht werden, worin A und B Functionen der Elemente der Bahnen von m und m' sind. Da hiernach A und B, wenigstens während Eines Umlaufs von m, also während λ von 0 bis 360° wächst, als constant angesehen werden können, so muss die Gleichung $A\cos\lambda = B\sin\lambda$ unabhängig von λ bestehen, und es müssen daher A und B einzeln null sein. Jede der beiden Gleichungen zerfällt daher in zwei, die man erhält, wenn man λ das einemal $= 0$, das anderemal $= 90°$ sein lässt. Somit ergeben sich, wenn man noch f und g statt $e\cos\omega$ und $e\sin\omega$, und eben so

$$(1^*)\quad e'\cos\omega' = f' \text{ und } e'\sin\omega' = g'$$

setzt, die vier Gleichungen:

$$(3) \ldots\ m'Df + m'Ef' = 2g_1,\quad m'Dg + m'Eg' = -2f_1,$$
$$(4) \ldots\ m'Gf + m'Hf' = 2g_1,\quad m'Gg + m'Hg' = -2f_1.$$

Es folgt hieraus zunächst:

$$(D-G)f+(E-H)f'=0,\ (D-G)g+(E-H)g'=0,$$

mithin

$$(D-G)(fg'-f'g)=0.$$

Weil aber $fg'-f'g$, $=ee'\sin(\omega'-\omega)$, wenigstens im Allgemeinen, nicht null ist, so ist

$$D=G,\text{ folglich auch }E=H,$$

und wenn wir hierin für D, .. H aus (2) ihre Werthe substituiren:

$$(5)\quad\begin{cases}2D_0+G_0=-\frac{1}{2}a^2\frac{dM_0}{da}-4C_0,\\ 2E_0+H_0=-\frac{1}{2}a^2\frac{dN_0}{da}-\frac{1}{2}aN_0.\end{cases}$$

Somit hat uns die Annahme der Veränderlichkeit von f und g zu den vier Gleichungen (3) und (5) geführt, in deren zwei erstern D und E die aus (2) in Verbindung mit (5) fliessenden Werthe

$$(6)\quad\begin{cases}D=-\frac{1}{2}a^2\frac{dM_0}{da}-3C_0,\\ E=-\frac{1}{2}a^2\frac{dN_0}{da}-aN_0\ \text{haben.}\end{cases}$$

§. 165.

Die zuletzt gefundenen Werthe von D und E lassen sich auf sehr einfache Formen reduciren. — Aus (2*) in §. 159. folgt $\frac{dM_0}{da}=-a\frac{d^2A_0}{da^2}$, und nach §. 158. zu Ende ist .... $C_0=-\frac{1}{2}a^2\frac{dA_0}{da}$. Da nun $A_0=\mathrm{A}_0$ (§. 158.), so wird

$$D=\frac{1}{2}a^3\frac{d^2\mathrm{A}_0}{da^2}+a^2\frac{d\mathrm{A}_0}{da},$$

und wenn man darin für die Differentialquotienten von A_0 aus §. 157. ihre Werthe setzt:

$$D=\frac{1}{2}a^2a'\mathrm{B}_1.$$

Ferner ist nach §. 161. .. $N_0=-A_1+a\frac{dA_1}{da}$, und weil $A_1=\mathrm{A}_1-\frac{a}{a'^2}$ ist: $N_0=-\mathrm{A}_1+a\frac{d\mathrm{A}_1}{da}$

$$=aa'\mathrm{B}_2-a^2\mathrm{B}_1,$$

wenn man in [6] des §. 157. $i = -1$ setzt; folglich

$$\frac{dN_0}{da} = a\frac{d^2A_1}{da^2} = 2aB_1 - a'B_2$$

nach [11] ebendaselbst. Hiermit aber wird

$$E = -\tfrac{1}{4}a^2a'B_2.$$

Nun haben wir im vorigen §. die Veränderlichkeit von f und g, als lediglich von der Veränderlichkeit der Länge des Perihels herrührend, angenommen. Bei dieser Voraussetzung folgt aus (1) durch Differentiation:

$$f_1ndt = -e\sin\omega d\omega = -gd\omega,$$
$$g_1ndt = e\cos\omega d\omega = fd\omega,$$

folglich $ff_1 + gg_1 = 0$. Nach (3) ist aber diese Summe $= \frac{1}{2}m'E(gf' - fg')$, also nicht $= 0$, weil B_2, und daher auch E, nicht $= 0$ ist. Mithin sind wir genöthigt, ausser ω auch noch die Excentricität e veränderlich zu setzen. Unter dieser Hypothese erhalten wir

$$f_1ndt = \cos\omega\,.\,de - \sin\omega\,.\,ed\omega,$$
$$g_1ndt = \sin\omega\,.\,de + \cos\omega\,.\,ed\omega.$$

Hiermit werden die Gleichungen (3), nachdem in ihnen für $f, .. g'$ ihre Werthe aus (1) und (1*) substituirt worden:

$$\sin\omega\,.\,de + \cos\omega\,.\,ed\omega = \tfrac{1}{2}m'ndt\,(De\cos\omega + Ee'\cos\omega'),$$
$$-\cos\omega\,.\,de + \sin\omega\,.\,ed\omega = \tfrac{1}{2}m'ndt\,(De\sin\omega + Ee'\sin\omega');$$

folglich

$$de = \tfrac{1}{2}m'ndt\,.\,Ee'\sin(\omega - \omega'),$$
$$ed\omega = \tfrac{1}{2}m'ndt\,[De + Ee'\cos(\omega - \omega')],$$

wodurch, wenn man noch für D und E ihre so eben erhaltenen Werthe setzt, die Geschwindigkeiten $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d\omega}{dt}$, mit denen sich e und ω ändern, gefunden sind.

§. 166.

Zur Bestimmung der vier Coefficienten D_0, E_0, G_0, H_0 in den Störungsgliedern von r und l, deren Argumente α und β oder $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ sind, sind uns nur die Gleichungen (5) übrig, die nach Substitution der im vorigen

§. für C_0, $\frac{dM_0}{da}$, N_0 und $\frac{dN_0}{da}$ bemerkten Werthe sich verwandeln in

$$(5^*) \begin{cases} 2D_0 + G_0 = \frac{4}{3} a^2 \frac{dA_0}{da} + \frac{1}{2} a^3 \frac{d^2 A_0}{da^2}, \\ 2E_0 + H_0 = \frac{1}{2} a A_1 - \frac{1}{2} a^2 \frac{dA_1}{da} - \frac{1}{4} a^3 \frac{d^2 A_1}{da^2}. \end{cases}$$

Dass somit die vier Coefficienten sich nicht einzeln, sondern nur die zwei Aggregate $2D_0 + G_0$ und $2E_0 + H_0$ sich bestimmen lassen, und dass daher einer der beiden Coefficienten D_0 und G_0, so wie einer der beiden E_0 und H_0, nach Willkühr genommen werden kann, liegt ähnlicherweise, wie dies beim Monde in §. 125. gezeigt worden, in der Natur der Sache. Es ist nämlich, wenn man in den für r und l in §. 160. angenommenen Formen bloss die Glieder berücksichtigt, welche $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ zu Argumenten haben:

$$(a) \begin{cases} r : a = 1 - (e - m'eD_0) \cos(\lambda - \omega) + m'e'E_0 \cos(\lambda - \omega'), \\ l = \lambda + (2e + m'eG_0) \sin(\lambda - \omega) + m'e'H_0 \sin(\lambda - \omega'). \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(b) \begin{cases} (2e + m'eG_0) \cos\omega + m'e'H_0 \cos\omega' = 2e_{,} \cos\omega_{,}, \\ (2e + m'eG_0) \sin\omega + m'e'H_0 \sin\omega' = 2e_{,} \sin\omega_{,}, \end{cases}$$

$$(c) \ldots (e - m'eD_0) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, \omega - m'e'E_0 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, \omega' = e_{,,} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, \omega_{,,},$$

wo $e_{,}$ und $\omega_{,}$, eben so wie $e_{,,}$ und $\omega_{,,}$, von e und ω nur um Grössen von der Ordnung $m'e$ oder $m'e'$ verschieden sein werden, so wird

$$(d) \begin{cases} l = \lambda + 2e_{,} \sin(\lambda - \omega_{,}), \\ r : a = 1 - e_{,,} \cos(\lambda - \omega_{,,}). \end{cases}$$

Zu den rein elliptischen Werthen von r und l Glieder mit den Argumenten $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ hinzufügen, kommt daher darauf hinaus, die zwei Elemente $e_{,}$ und $\omega_{,}$, oder $e_{,} \cos\omega_{,}$ und $e_{,} \sin\omega_{,}$, mit denen man die Länge berechnet hat, um etwas geändert bei der Berechnung des Radius Vector anzunehmen. Die Theorie der Gravitation kann mithin nur diese beiden Aenderungen zu bestimmen lehren, und wir haben folglich, indem wir die vier durch die Theorie

zu ermittelnden Constanten D_0, .. H_0 einführten, zwei zu viel angenommen.

Die Aenderungen selbst ergeben sich aus (*b*) und (*c*):

$$(e) \;..\; e_{\prime\prime} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_{\prime\prime} - e_{\prime} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_{\prime} = - m'e\,(D_0 + \tfrac{1}{2} G_0) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega$$
$$- m'e'\,(E_0 + \tfrac{1}{2} H_0) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega',$$

worin, wegen der Vernachlässigung des Quadrats von m', statt e und ω auch $e_{\prime}$ und $\omega_{\prime}$ oder $e_{\prime\prime}$ und $\omega_{\prime\prime}$ gesetzt werden können. In Uebereinstimmung mit (5*), geht hieraus hervor, dass $2D_0 + G_0$ und $2E_0 + H_0$ die allein durch die Theorie bestimmbaren Constanten sind.

Für den astronomischen Zweck ist es am bequemsten, $e_{\prime}$ und $\omega_{\prime}$ als Elemente der Bahn anzunehmen und daher bei der Länge die Störungsglieder, deren Argumente $\lambda - \omega$ und $\lambda - \omega'$ sind, wegzulassen. Für den Radius Vector ist alsdann, wenn man $e_{\prime\prime} \cos \omega_{\prime\prime}$ und $e_{\prime\prime} \sin \omega_{\prime\prime}$ mittelst (*e*) aus (*d*) eliminirt:

$$r : a = 1 - [e_{\prime} - m'e_{\prime}\,(D_0 + \tfrac{1}{2} G_0)] \cos (\lambda - \omega_{\prime})$$
$$+ m'e'\,(E_0 + \tfrac{1}{2} H_0) \cos (\lambda - \omega'),$$

ein Resultat, zu dem man auch unmittelbar gelangt, wenn man bei der Unbestimmtheit zwischen D_0, .. H_0 die Coefficienten G_0 und H_0 in (5*) und (*a*) geradezu null setzt.

§. 167.

Eben so, wie beim Radius Vector und der Länge, wurde im vorigen Kapitel auch bei Entwickelung der Störungen der Breite der Coefficient des Gliedes, für welches $i = 0$, und dessen Argument daher $\lambda - \vartheta$ war, unendlich gross gefunden. Zur Beseitigung dieses der Natur der Sache widersprechenden Ergebnisses, wollen wir, wie in dem ganz ähnlichen Falle beim Monde, annehmen, dass die mittlere Bahnebene des Planeten m nicht fest sei, sondern dass bei unveränderter Neigung derselben gegen die Bahn von m' ihre Knoten mit dieser Bahn sich gleichförmig an letzterer fortbewegen. Indem wir alsdann die Breite auf die Lage, welche die mittlere Bahn von m in der Epoche hat, beziehen, haben wir nach §. 138. zu dem für die Breite in §. 162. ange-

nommenen Ausdrucke noch ein Glied von der Form $m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta)$ hinzuzufügen, worin $m'Hn$ die constante Geschwindigkeit der Knoten ausdrückt. Mit Weglassung der Störungsglieder, in denen i nicht null ist, setzen wir demnach:

$$b = m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta) + m'\iota K_0 \sin(\lambda - \vartheta).$$

Hieraus folgen für die Kraft U_1 die zwei Ausdrücke:

$$U_1 = -b + \tfrac{1}{2} m'\iota a^2 a' \mathrm{B}_1 \sin(\lambda - \vartheta) \text{ (§. 162.)}$$
$$= -m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta) + m'\iota (\tfrac{1}{2} a^2 a' \mathrm{B}_1 - K_0) \sin(\lambda - \vartheta),$$
$$U_1 = \frac{ad^2 b}{an^2 dt^2} = -m'\iota Hnt \cos(\lambda - \vartheta) - m'\iota (2H + K_0) \sin(\lambda - \vartheta).$$

Damit nun dieselben identisch werden, haben wir nur $H = -\frac{1}{4} a^2 a' \mathrm{B}_1$ zu setzen, woraus die Geschwindigkeit der Knotenbewegung

$$m'Hn = -\tfrac{1}{4} m' n a^2 a' \mathrm{B}_1$$

folgt. Da, wie aus den in §. 154. entwickelten Reihen hervorgeht, B_1 für jedes Planetenpaar eine positive Grösse ist, so ist die Bewegung selbst rückgängig. — Die Constante K_0 bleibt — aus demselben Grunde wie h_1 in §. 138. — unbestimmt und kann $= 0$ gesetzt werden.

§. 168.

Obschon die Bahn von m ihre Neigung gegen die Bahn von m' nicht ändert, so wird doch wegen des Rückwärtsgehens der Knoten der erstern Bahn auf der letztern die Neigung der erstern gegen irgend eine andere feste Ebene veränderlich sein. Um dieses näher zu untersuchen, seien auf der Oberfläche der Himmelskugel P und P' (Fig. 43.) die Nordpole der Bahnen von m und m', also der Bogen $PP' = \iota$ (vergl. §. 142.). Der Nordpol der festen Ebene oder des grössten Kreises, in welchem die Kugelfläche von dieser Ebene geschnitten wird, sei E; er werde den Polen P und P' so nahe liegend angenommen, dass seine Abstände von ihnen mit PP' von gleicher Ordnung sind, und dass daher das sphärische Dreieck EPP' als ein ebenes betrachtet werden kann. Sei O der Punkt, von welchem an in dem festen Kreise die Längen gerechnet werden, O_1 der Anfangs-

punkt der in der Bahn von m gezählten Längen und K der eine der beiden Knoten dieser Bahn auf dem festen Kreise. Nach der in §. 47. gemachten Bestimmung ist $O_1K = OK$ zu nehmen; wegen der Kleinheit des Winkels OKO_1, $= EP$, und weil $EOK = 90^0$, wird O_1 einerlei mit dem Durchschnitte von EO mit der Bahn von m sein.

Werden nun in Bezug auf die feste Ebene die Neigungen der Bahnen von m und m', $= J$ und J', und die Längen ihrer aufsteigenden Knoten $= \Theta$ und Θ' gesetzt, so ist $EP = J$, $EP' = J'$ und (§. 142.) $OEP = 270^0 + \Theta = \Theta - 90^0$, $OEP' = \Theta' - 90^0$, so wie $O_1PP' = \vartheta - 90^0$. Bezieht man daher P und P' auf ein in der Ebene EPP' gelegenes rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt E ist, und dessen Abscissenaxe die Richtung EO hat, und nennt p, q und p', q' ihre Coordinaten, so ist

$$p = J\cos(\Theta - 90^0),\quad q = J\sin(\Theta - 90^0),\ \text{d. i.}$$

$$(a)\ \begin{cases} p = J\sin\Theta,\quad q = -J\cos\Theta, \text{ und eben so} \\ p' = J'\sin\Theta',\quad q' = -J'\cos\Theta'. \end{cases}$$

Da ferner PO_1 als parallel mit EO betrachtet werden kann, so sind die Projectionen von PP' auf die beiden Axen

$$p' - p = \iota\cos(\vartheta - 90^0),\quad q' - q = \iota\sin(\vartheta - 90^0),\ \text{d. i.}$$

$$(b)\quad p' - p = \iota\sin\vartheta,\quad q' - q = -\iota\cos\vartheta.$$

Die Frage ist nun nach den Aenderungen von J und Θ oder p und q, als den Elementen, wodurch die Lage der Bahn von m gegen die feste Ebene bestimmt wird, wenn, bei constant bleibender Neigung ι der Bahn von m gegen die von m', erstere an letzterer um $d\vartheta$ fortrückt. Es kommt aber, wenn man die Gleichungen (b) nach p, q und ϑ differentiirt:

$$(c)\quad dp = -\iota\cos\vartheta d\vartheta = (q' - q)\,d\vartheta,\quad dq = -(p' - p)\,d\vartheta,$$

und wenn man hierin für p, q und p', q' und die Differentiale von p, q ihre aus (a) fliessenden Werthe substituirt:

$$dJ.\sin\Theta + Jd\Theta.\cos\Theta = (J\cos\Theta - J'\cos\Theta')\,d\vartheta,$$
$$-dJ.\cos\Theta + Jd\Theta.\sin\Theta = (J\sin\Theta - J'\sin\Theta')\,d\vartheta.$$

Hieraus erhält man

$$dJ = -J'd\vartheta \,.\, \sin(\Theta - \Theta'),$$
$$Jd\Theta = Jd\vartheta - J'd\vartheta \,.\, \cos(\Theta - \Theta'),$$

und damit die Geschwindigkeiten $\frac{dJ}{dt}$ und $\frac{d\Theta}{dt}$, mit denen sich J und Θ ändern, wenn man diese Gleichungen noch mit dt dividirt und für $\frac{d\vartheta}{dt}$ seinen in §. 167. gefundenen Werth, $-\frac{1}{4}m'na^2a'B_1$, setzt.

§. 169.

Die in §. 165. und im vorigen §. erhaltenen Aenderungen, welche die Elemente e, ω, J und Θ durch m' erleiden, nennt man wegen der Langsamkeit, mit der sie vor sich gehen, Secularstörungen. Ihr charakteristisches Merkmal besteht darin, dass sie bloss von den Elementen der Bahnen von m und m' abhängen, nicht aber von den Oertern dieser Planeten in ihren Bahnen, wie dies bei den in den zwei vorigen Kapiteln entwickelten Störungen der Fall war, als welche so oft zu denselben Werthen zurückkehren, als die beiden Planeten wieder dieselbe Stellung gegen einander, oder auch gegen ihre Perihelien nnd Knoten, einnehmen, und die deshalb periodische Störungen genannt werden (§. 109.). Während diese letzteren nur von kurzer Dauer und vorübergehender Wirkung sind, werden durch die secularen Störungen die Elemente selbst und damit die Gestalt der Bahnen und ihre Lage im Raume allmählig geändert. Allerdings sind, streng genommen, auch die Secularstörungen von periodischer Natur; allein ihre Perioden umfassen nicht selten Zehntausende, ja Hunderttausende von Jahren, und ihre Wirkungen können daher auf lange hinaus der Zeit proportional angesehen und nach den in §§. 165. und 168. erhaltenen Formeln berechnet werden.

Was die zwei noch übrigen Elemente a und ε betrifft, so sind nach denselben Schlüssen, wie bei der Mondstheorie (§§. 144. und 147.), so lange wenigstens die Quadrate und höheren Potenzen der Excentricitäten und der Massen unberücksichtigt bleiben, die Secularstörungen von a und ε

null. Indessen kann die nach §. 158. zu a zu setzende Constante $\frac{1}{2} m' a C_0$, $= - \frac{1}{6} m' a^3 \frac{dA_0}{da}$, ganz oder zum Theil in eine seculare Störung des Elements ε verwandelt werden. Da nämlich

$$\lambda = nt + \varepsilon = n_1 t + \varepsilon + (n - n_1)\, t,$$

so ist es einerlei, ob n zur mittlern Bewegung und ε constant, oder ob n_1 zur mittlern Bewegung genommen, und dem ε der der Zeit proportionale Zusatz $(n - n_1)\, t$ gegeben wird. Verwandelt man aber n in n_1, und bedeutet a_1 die zu n_1 gehörende mittlere Entfernung, ist also $a_1{}^3 n_1{}^2 = a^3 n^2 = K(M + m)$, so ist, wenn man $n - n_1$ und $a - a_1$ als kleine Grössen von der Ordnung m' betrachtet:

$$3n_1\, (a - a_1) + 2a_1\, (n - n_1) = 0,$$

folglich, wenn man $n - n_1 = - 3m' n_1 g$ setzt: $a - a_1 = 2m' a_1 g$. Die durch

$$r = a + \tfrac{1}{2} m' a C_0 \text{ und } l = nt + \varepsilon$$

ausgedrückte Bewegung ist daher identisch mit der durch

$$r = a_1 + 2m' g a_1 + \tfrac{1}{2} m' a_1 C_0 \text{ und } l = n_1 t + \varepsilon - 3m' g n_1 t$$

ausgedrückten, wo g eine willkührliche Zahl ist, nach deren Bestimmung sich der Werth von a_1 richtet. Setzt man sie $= - \frac{1}{4} C_0$, so wird

$$r = a_1 \text{ und } l = n_1 t + \varepsilon + \tfrac{3}{4} m' C_0 n_1 t,$$

wobei das letzte Glied von l als die seculare Aenderung von ε betrachtet werden kann.

§. 170.

Wie schon bemerkt worden, lassen sich die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Elemente e, ω, J und Θ ändern, als constant, wenigstens auf lange Zeit hinaus, ansehen. Da aber in den Ausdrücken für diese Geschwindigkeiten die sich ändernden Elemente selbst und ausserdem noch die Elemente des störenden Planeten m' vorkommen, welche letztere durch Einwirkung von m auf m' gleichfalls seculare Aenderungen erleiden, so werden auch die Geschwindigkeiten mit der Zeit andere und andere Werthe erhalten. Am leichtesten lässt

sich diese zusammengesetzte Wirkung bei den Elementen J und Θ übersehen.

Sind, wie in §. 168., P und P' (Fig. 44.) die Nordpole der Bahnen von m und m', so ist nach §. 167. die Neigung PP', $= \iota$, constant, und die Knoten der Bahn von m gehen auf der von m' mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{1}{4} m'na^2a'B_1$, welche C heisse, rückwärts, so dass, wenn Q den Ort von P am Ende des nächstfolgenden dt vorstellt, PQ auf PP' normal und der Winkel $PP'Q = Cdt$ ist. Bliebe demnach die Lage der Bahnebene von m', nnd damit P', unverändert, so würde P mit der Winkelgeschwindigkeit C rückwärts einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt P' wäre. Allein wegen der Störung, welche m' durch m erleidet, bewegt sich auch P' um P rückwärts mit einer Winkelgeschwindigkeit C', die aus C durch Vertauschung der Elemente von m und m' sich ergiebt und daher $\frac{1}{4} mn'a'^2aB_1$ ist, weil B_1, als der Coefficient eines Gliedes in der nach den Cosinussen der Vielfachen von u entwickelten Function $U^{-\frac{3}{2}}$ (§. 157.), eben so wie U selbst, von a und a' auf gleiche Weise abhängen muss. P' rückt daher normal auf PP' während des nächsten dt um eine Linie $P'Q'$ fort, so dass der Winkel $P'PQ' = C'dt$ ist.

Hiernach kann man sich die beiden Pole aus ihrer ersten Lage P, P' in die nachherige Q, Q' dadurch gekommen denken, dass sich die Linie PP' um ihren Durchschnitt N mit QQ' gedreht hat. Weil Q und Q' auf entgegengesetzten Seiten von PP' liegen, so fällt N zwischen P und P', und dieses so, dass $PN : NP' = PQ : P'Q' = C : C' = m'na : mn'a' = m'\sqrt{a'} : m\sqrt{a}$, weil, bei der Vernachlässigung der Planetenmassen gegen die Sonnenmasse, $n^2a^3 = n'^2a'^3$ (§. 65.) und daher $na : n'a' = \sqrt{a'} : \sqrt{a}$ ist; der Drehungswinkel aber ist $PNQ = PP'Q + P'QQ' = (C + C')\,dt$.

Dieselbe Betrachtung lässt sich nun für jedes folgende dt wiederholen, und wir gewinnen damit das merkwürdige Resultat, *dass die Pole der Bahnen von m und m' mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten, $= C + C'$, Kreise rückwärts um einen ruhenden Punkt N beschreiben, von welchem*

sie nach entgegengesetzten Seiten in Entfernungen abstehen, die sich wie C und C', d. i. umgekehrt wie die Producte aus den Massen in die Quadratwurzeln der grossen Axen, verhalten; oder mit andern Worten: *dass sich die gemeinschaftliche Knotenlinie beider Bahnen mit der Winkelgeschwindigkeit C + C' rückwärts in einer ruhenden Ebene (deren Pol N ist) dreht, mit welcher die beiden Bahnen nach entgegengesetzten Seiten hin unveränderliche in dem Verhältnisse von C zu C' stehende Winkel machen.*

§. 171.

Zusätze. *a.* Sei E, wie in §. 168., ein von P und P' in geringer Entfernung liegender fester Punkt der Himmelskugel, auf welchen die Bewegungen von P und P' bezogen werden, und $EP = J$, $EP' = J'$. Nach einem bekannten Satze der Geometrie hat man:

$$NP' . EP^2 + PN . EP'^2 = PP' . EN^2 + PP' . PN . NP'.$$

Weil auf der rechten Seite dieser Gleichung, zu Folge der Kreisbewegungen von P und P' um den festen Punkt N, sich bloss constante Grössen vorfinden, so muss auch die linke Seite constant sein. Berücksichtigen wir daher noch, dass die constanten Linien NP' und PN in dem Verhältnisse $C' : C$, $= m\sqrt{a} : m'\sqrt{a'}$, sind, so ergiebt sich folgende zwischen den Neigungen J und J' bestehende merkwürdige Relation:

$$m\sqrt{a} . J^2 + m'\sqrt{a'} . J'^2 = \text{einer beständigen Grösse.}$$

Die Neigungen J und J' können hiernach nicht über gewisse Grenzen wachsen, und wenn die eine abnimmt, muss die andere zunehmen, — welches beides aber auch schon aus den Kreisbewegungen von P und P' folgt.

b. Die ruhende Ebene, welche N zum Pole hat, ist die unveränderliche Ebene des Systems der drei Körper M (Sonne), m und m'. Denn bedeuten F, F' und f die Flächengeschwindigkeiten der Radien Mm, Mm' und mm', wenn man bei unveränderter relativer Bewegung der zwei Körper jedes Radius den einen ruhend annimmt, so wird die unveränderliche Ebene ihrer Lage nach durch Zusammensetzung der

Flächen $M . m . F$, $M . m' . F'$ und $m . m' . f$ gefunden (§. 90.), oder — weil es hier nur auf das gegenseitige Verhältniss dieser Flächen ankommt, und die dritte gegen die zwei ersten fast verschwindet — durch Zusammensetzung der zwei Flächen $m . F$ und $m' . F'$. Die Axe der unveränderlichen Ebene wird folglich gefunden, wenn man zwei auf den Flächen F und F' perpendikulare Linien, die sich wie $m . F$ und $m' . F'$ verhalten, zusammensetzt (§. 87.).

Nun sind P und P' ersichtlich die Pole der Flächen F und F'. Heisst daher Z das Centrum der Himmelskugel, so haben die zwei zusammenzusetzenden Linien die Richtungen ZP und ZP'. Die durch Z gelegte Axe der unveränderlichen Ebene muss folglich mit ZP uud ZP' in einer Ebene liegen, und die Sinus der Winkel der Axe mit ZP und ZP', oder auch die Winkel selbst, wegen der Kleinheit von PP', müssen sich — eben so wie bei zwei zusammenzusetzenden Kräften — wie $m' . F'$ und $m . F$ verhalten. Es ist aber $F = \frac{1}{2} na^2$, $F' = \frac{1}{2} n'a'^2$ (§. 127. *b.*) und daher

$$m'F' : mF = m'n'a'^2 : mna^2 = m'\sqrt{a'} : m\sqrt{a} = C : C'$$

$= PN : NP'$. Mithin ist N selbst der Pol der unveränderlichen Ebene.

§. 172.

Das in §. 170. durch geometrische Betrachtung erhaltene Resultat lässt sich ohne Schwierigkeit auch durch Analysis finden. — Man hat für die Bewegung des Pols P oder $(p,\ q)$ die Gleichungen (c) in §. 168., oder wenn man $-\,Cdt$ statt $d\vartheta$ schreibt:

$$(\alpha)\quad dp = -(q' - q)\ Cdt,\ \ dq = (p' - p)\ Cdt;$$

und eben so für die Bewegung des Pols P' oder $(p',\ q')$, wenn man in (α) die auf m und m' bezüglichen Grössen mit einander verwechselt:

$$(\beta)\quad dp' = (q' - q)\ C'dt,\ \ dq' = -(p' - p)\ C'dt.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt:

$$C'dp + Cdp' = 0,\ \ C'dq + Cdq' = 0.$$

Setzt man daher:

$$(\gamma)\quad C'p + Cp' = (C + C')\,p_1,\quad C'q + Cq' = (C + C')\,q_1,$$

so sind dp_1 und $dq_1 = 0$, also p_1 und q_1 constant.

Ferner fliesst aus (α) und (β):

$$(\delta)\quad \begin{cases} dp' - dp = (q' - q)\,(C + C')\,dt, \\ dq' - dq = -(p' - p)\,(C + C')\,dt, \end{cases}$$

folglich $(p' - p)\,d\,(p' - p) + (q' - q)\,d\,(q' - q)$

$$= \tfrac{1}{2}d\,[(p' - p)^2 + (q' - q)^2] = \tfrac{1}{2}d\,.\,PP'^2 = 0.$$

Mithin bleibt PP' oder ι constant, und es wird folglich, wenn man

(ε) $p' - p = \iota\cos\varphi$, also $q' - q = \iota\sin\varphi$ setzt:

$$dp' - dp = -\iota\sin\varphi\,d\varphi,\quad dq' - dq = \iota\cos\varphi\,d\varphi.$$

Hiermit geht die eine, wie die andere, der beiden Gleichungen (δ) über in

$d\varphi = -(C + C')\,dt$, und man kann daher

$$\varphi = -(C + C')\,t + D$$

setzen, wo D einen constanten Winkel bedeutet.

Es folgt aber aus (ε) in Verbindung mit (γ):

$$(\zeta)\quad \begin{cases} p = p_1 - \dfrac{C}{C + C'}\,\iota\cos\varphi,\quad p' = p_1 + \dfrac{C'}{C + C'}\,\iota\cos\varphi, \\ q = q_1 - \dfrac{C}{C + C'}\,\iota\sin\varphi,\quad q' = q_1 + \dfrac{C'}{C + C'}\,\iota\sin\varphi, \end{cases}$$

worin noch für φ sein Werth $-(C + C')\,t + D$ zu substituiren ist.

Uebereinstimmend mit §. 170. beschreiben demnach die Pole (p, q) und (p', q'), oder P und P', um den ruhenden und immer zwischen ihnen liegenden Pol (p_1, q_1), oder N, Kreise mit den Halbmessern $\frac{C}{C + C'}\,\iota$ und $\frac{C'}{C + C'}\,\iota$ mit der gemeinschaftlichen constanten Winkelgeschwindigkeit $-(C + C')$. Zugleich sieht man, wie mittelst der letztern Formeln die Oerter von P und P' für jede Zeit t durch die sechs Constanten C, C', p_1, q_1, ι, D bestimmt werden können, von denen die vier letztern aus den Oertern, welche P und P' in der Epoche einnehmen, sich immer leicht finden lassen.

§. 173.

Um von den zuletzt erhaltenen Formeln eine Anwendung zu zeigen, wollen wir nach ihnen die Secularbewegungen der Pole der Bahnen des Jupiter und des Saturn zu berechnen suchen. Es sind diese zwei Planeten die bei weitem massenreichsten in unserm System. Die Störungen, welche sie von den übrigen Planeten erleiden, sind daher nur unbedeutend gegen diejenigen, welche sie auf einander ausüben, und man wird folglich ihre Bewegungen schon nahe richtig erhalten, wenn man bloss ihre gegenseitigen Störungen in Rechnung nimmt.

Beziehen sich die Buchstaben ohne Accent auf den Jupiter und die accentuirten auf den Saturn, so ist

$$m = \frac{1}{1053,9}, \quad m' = \frac{1}{3500,2}.$$

Ferner ist nach der Méc. cél. Tom. III. pag. 82.:

$$(a'^2 - 2aa' \cos u + a^2)^{-\frac{1}{2}} = a'^{-3}(2,179193$$
$$+ 3,185493 \cos u + 2,082131 \cos 2u + \ldots),$$

also, wenn man a' zur Längeneinheit nimmt:

$$\tfrac{1}{2} B_0 = 2,179193, \quad B_1 = 3,185493, \quad B_2 = 2,082131.$$

Sodann ist ebendaselbst pag. 81.

$$a : a' = a = 0,54531725,$$

und pag. 64. die jährlichen Bewegungen in Decimalsecunden:

$$n = 337210'',78, \quad n' = 135792'',34.$$

Hiermit findet sich

$$C = \tfrac{1}{4} m'na^2 B_1 = 22'',816, \quad C' = \tfrac{1}{4} mn'aB_1 = 55'',955,$$
$$C + C' = 78,771 \text{ Dec. sec.} = 25,522 \text{ Sex. sec.},$$

und damit die Umlaufszeit der Pole P und P' um N oder die Umlaufszeit der gemeinsamen Knotenlinie beider Bahnen in der unveränderlichen Ebene

$$= \frac{400 \,.\, 100 \,.\, 100}{78,771} = 50780 \text{ Jahren.}$$

Nun waren den 1. Januar 1800 die Neigungen beider Bahnen gegen die Ekliptik in Sexagesimalmass

$$J = 1^0\, 18'\, 51'',6, \quad J' = 2^0\, 29'\, 35'',9,$$

und die Längen ihrer aufsteigenden Knoten in derselben

$$\Theta = 98^0\,25'\,45'', \quad \Theta' = 111^0\,56'\,7''.$$

Hieraus folgen für jenen Zeitpunkt, als Epoche, die rechtwinkligen Coordinaten von P und P', wenn der Pol der Ekliptik und der Frühlingsnachtgleichepunkt in der Epoche zu den Punkten E und O genommen werden (§. 168.):

$$p = J \sin\Theta = 4680'',5, \quad q = -J\cos\Theta = 693'',6,$$
$$p' = 8326\;,1, \quad q' = 3353\;,1,$$

und damit nach (ε) für die Epoche, als wo $\varphi = D$ ist:

$$\iota\cos D = p' - p = 3645'',6, \quad \iota\sin D = q' - q = 2659'',5,$$

woraus die Constanten

$$D = 36^0\,6'\,40''$$

und

$$\iota = 4512'',6 = 1^0\,15'\,12'',6 \text{ hervorgehen.}$$

Weiter folgen hieraus die Halbmesser

$$NP = \frac{C}{C+C'}\,.\,\iota = 1307'',0 = 21'\,47'',0,$$
$$NP' = \frac{C'}{C+C'}\,.\,\iota = 3205\;,5 = 53\;\;25\;,5,$$

und nach (ζ) die Coordinaten von N:

$$p_1 = p + NP\,.\cos D = 5736'',4,$$
$$q_1 = q + NP\,.\,\sin D = 1463'',9.$$

Die Coordinaten von P und P' nach t seit 1800 verflossenen Jahren sind alsdann nach (ζ):

$$p = 5736'',4 - 1307'',0\cos\varphi, \quad p' = 5736'',4 + 3205'',5\cos\varphi,$$
$$q = 1463\;,9 - 1307\;,0\sin\varphi, \quad q' = 1463\;,9 + 3205\;,5\sin\varphi,$$

wo

$$\varphi = 36^0\,6'\,40'' - 25'',522\,.\,t.$$

Zusätze. *a.* Werden von der Ebene, deren Pol N ist, oder der unveränderlichen Ebene des Systems von Sonne, Jupiter und Saturn, die Neigung und die Knotenlänge rücksichtlich der Ekliptik mit J_1 und Θ_1 bezeichnet, so hat man

$$J_1\sin\Theta_1 = p_1, \quad J_1\cos\Theta_1 = -q_1,$$

woraus sich mit den obigen Werthen von p_1 und q_1

$$J_1 = EN = 1^0\,38'\,40'',2 \text{ und } \Theta_1 = 104^0\,18'\,58''$$

finden, — Bestimmnngen, welche von den in §. 89. für die unveränderliche Ebene aller Körper unsers Sonnensystems angegebenen Bestimmungen, wegen der überwiegenden Massen des Jupiter und des Saturn, nicht sehr abweichen.

b. Die grösste und die kleinste Neigung gegen die Ekliptik ist

für Jupiter: $EN \pm NP = 2^0\ 0'\ 27''$ und $1^0\ 16'\ 53''$,
für Saturn: $EN \pm NP' = 2\ \ 32\ \ 6$ und $0\ \ 45\ \ 15$.

Ist die Neigung der einen Bahn am grössten, so ist die der andern am kleinsten. Die Linie PP' geht alsdann verlängert durch E, und die Knoten beider Bahnen fallen zusammen.

§. 174.

Einer ähnlichen Analysis, wie in §. 172., wollen wir jetzt auch die Secnlaränderungen der Excentricitäten und der Perihelien von m und m', oder der durch sie bestimmten Grössen f, g, f', g', unterwerfen. — In §. 164. (3) haben wir gefunden:

$$2f_1 = -m'Dg - m'Eg',\quad 2g_1 = m'Df + m'Ef',$$

d. i. (§. 165.)

$$df = -\tfrac{1}{4}m'a^2a'n\,(B_1 g - B_2 g')\,dt,$$
$$dg = \tfrac{1}{4}m'a^2a'n\,(B_1 f - B_2 f')\,dt;$$

und eben so ist für die durch m erzeugten Secularänderungen von f' und g', weil B_2 sowohl als B_1 eine symmetrische Function von a und a' ist

$$df' = -\tfrac{1}{4}ma'^2an'\,(B_1 g' - B_2 g)\,dt,$$
$$dg' = \tfrac{1}{4}ma'^2an'\,(B_1 f' - B_2 f)\,dt;$$

oder, wenn wir zur Abkürzung die Constanten

$$\tfrac{1}{4}m'a^2a'nB_1 = Gbh,\quad \tfrac{1}{4}m'a^2a'nB_2 = Gh,$$
$$\tfrac{1}{4}ma'^2an'B_1 = Gb,\quad \tfrac{1}{4}ma'^2an'B_2 = G,$$

wo daher

$$(\alpha)\quad b = \frac{B_1}{B_2} \text{ und } h = \frac{m'an}{ma'n'} = \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \text{ ist, setzen:}$$

$$df = -Gh\,(bg - g')\,dt,\quad df' = -G\,(bg' - g)\,dt,$$
$$dg = Gh\,(bf - f')\,dt,\quad dg' = G\,(bf' - f)\,dt.$$

Es folgt hieraus:

$$df + idf' = -Gg\,(bh - i)\,dt + Gg'\,(h - bi)\,dt,$$
$$dg + idg' = \quad Gf\,(bh - i)\,dt - Gf'\,(h - bi)\,dt.$$

Man setze nun

$$(\beta)\quad G\,(bh - i) = H \text{ und } G\,(h - bi) = -Hi,$$

durch welche zwei Gleichungen die vorhin unbestimmt gelassene Grösse i und überdies H bestimmt werden. Man erhält damit

$$(\gamma)\quad \begin{cases} df + idf' = -H\,(g + ig')\,dt, \\ dg + idg' = \quad H\,(f + if')\,dt, \end{cases}$$

zwei Gleichungen, aus denen sich ähnlicher Weise, wie aus den ähnlich geformten Gleichungen (δ) in §. 172., die Lösung des Problems ergeben wird.

Es folgt aber aus (β) nach Elimination von H:

$$(\delta)\quad i^2 + b\,(1 - h)\,i - h = 0.$$

Dieser Gleichung zufolge hat i zwei durch die Constanten b und h bestimmte Werthe, welche man i_1 und i_2 nenne; die ihnen zugehörigen Werthe von H, $= G\,(bh - i_1)$ und $G\,(bh - i_2)$, seien H_1 und H_2. Indem man nun den ersten dieser zwei Werthe von i in den Gleichungen (γ) einführt und

$$f + i_1 f' = x,\quad g + i_1 g' = y \text{ setzt, kommt:}$$
$$(\varepsilon)\quad dx = -H_1 y dt,\quad dy = H_1 x dt,$$

folglich $xdx + ydy = \frac{1}{2}d\,(x^2 + y^2) = 0$. Mithin ist $x^2 + y^2$ eine Constante, welche man $= l_1{}^2$, und hiernach

$$x = l_1 \cos\psi_1,\quad y = l_1 \sin\psi_1 \text{ setze, woraus}$$
$$dx = -y d\psi_1,\quad dy = x d\psi_1$$

folgt. Die Substitution hiervon in der einen oder andern der Gleichungen (ε) giebt

$$d\psi_1 = H_1 dt \text{ und damit } \psi_1 = H_1 t + L_1,$$

wo L_1 den Werth von ψ_1 für $t = 0$ bezeichnet. Es ist demnach

$$(\zeta_1)\quad \begin{cases} f + i_1 f' = x = l_1 \cos\psi_1 = l_1 \cos\,(H_1 t + L_1), \\ g + i_1 g' = y = l_1 \sin\psi_1 = l_1 \sin\,(H_1 t + L_1). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (γ) mit Anwendung des zweiten aus (δ) fliessenden Werthes von i:

$$(\zeta_2)\quad \begin{cases} f + i_2 f' = l_2 \operatorname{coh}(H_2 t + L_2), \\ g + i_2 g' = l_2 \sin(H_2 t + L_2), \end{cases}$$

wo l_2 und L_2, eben so wie l_1 und L_1, Constanten sind, die man aus den Werthen von f, f', g, g', wie solche zu einer gewissen Zeit statt finden, zu bestimmen hat. Bezeichnet man nämlich diese Werthe für $t = 0$ mit f_0, f'_0, .., so ist

$$(\eta)\quad \begin{cases} f_0 + i_1 f'_0 = l_1 \cos L_1, & f_0 + i_2 f'_0 = l_2 \cos L_2, \\ g_0 + i_1 g'_0 = l_1 \sin L_1, & g_0 + i_2 g'_0 = l_2 \sin L_2, \end{cases}$$

woraus sich l_1, .. L_2 auf bekannte Weise finden lassen. Die Werthe von f, .. g' zur Zeit t ergeben sich alsdann durch Verbindung von (ζ_1) mit (ζ_2) und sind hiernach, wenn man, so wie

$$H_1 t + L_1 = \psi_1, \text{ auch noch } H_2 t + L_2 = \psi_2,$$

und die Constanten

$$\frac{l_1}{i_2 - i_1} = k_1, \quad \frac{l_2}{i_2 - i_1} = k_2 \text{ setzt:}$$

$$(\vartheta)\quad \begin{cases} f = i_2 k_1 \cos\psi_1 - i_1 k_2 \cos\psi_2, & f' = -k_1 \cos\psi_1 + k_2 \cos\psi_2, \\ g = i_2 k_1 \sin\psi_1 - i_1 k_2 \sin\psi_2, & g' = -k_1 \sin\psi_1 + k_2 \sin\psi_2. \end{cases}$$

§. 175.

Berechnen wir nach diesen Formeln die Secularstörungen, welche Jupiter und Saturn gegenseitig auf ihre Perihelien und Excentricitäten ausüben. — Mit den in §. 173. für m, m', a, a' ($= 1$), n, n', B_1, B_2 angegebenen Werthen findet sich

$$b = \frac{B_1}{B_2} = 1{,}52993, \quad h = \frac{m'}{m\sqrt{a}} = 0{,}40776,$$

und damit die Gleichung (δ)

$$i^2 + 0{,}90609 \,.\, i - 0{,}40776 = 0, \text{ woraus}$$
$$i_1 = 0{,}32990, \quad i_2 = -1{,}23598 \text{ folgt.}$$

Ferner erhält man in Sexagesimalsecunden

$$\log G = \log \tfrac{1}{4} m a n' B_2 = 1{,}07371,$$
$$H_1 = Gbh - Gi_1 = 3''{,}483,$$
$$H_2 = Gbh - Gi_2 = 22''{,}038.$$

Nun war am 1. Januar 1800

$$e = 0,048162,\quad \omega = 11^0\,7'\,38'',$$
$$e' = 0,056150,\quad \omega' = 89\;\;8\;\;20\;,\text{ folglich}$$
$$f_0 = e\cos\omega = 0,047257,\quad g_0 = e\sin\omega = 0,009295,$$
$$\log f'_0 = 6,92627 - 10,\quad \log g'_0 = 8,74930 - 10,$$

und daher nach (η)

$$l_1\cos L_1 = 0,047535,\quad l_2\cos L_2 = \;\;\,0,046214,$$
$$l_1\sin L_1 = 0,027817,\quad l_2\sin L_2 = -\,0,060097.$$

Hieraus folgt

$$L_1 = \;\;30^0\,20'\,10'',\quad \log l_1 = 8,74096 - 10,$$
$$L_2 = 307\;\;33\;\;34\;,\quad \log l_2 = 8,87973 - 10,$$
$$k_1 = \frac{l_1}{i_2 - i_1} = -\,0,035172,\quad k_2 = \frac{l_2}{i_2 - i_1} = -\,0,048414,$$

also zuletzt nach (ϑ)

$$f = 0,043472\cos\psi_1 + 0,015972\cos\psi_2,$$
$$g = 0,043472\sin\psi_1 + 0,015972\sin\psi_2,$$
$$f' = 0,035172\cos\psi_1 - 0,048414\cos\psi_2,$$
$$g' = 0,035172\sin\psi_1 - 0,048414\sin\psi_2,$$

wo

$$\psi_1 = \;\;30^0\,20'\,10'' + t\,.\;\;3'',483,$$
$$\psi_2 = 307\;\;33\;\;34\;\;+ t\,.\,22\;,038,$$

worin t die seit dem 1. Jannar 1800 verflossene Zeit, in Jahren ausgedrückt, bedeutet.

Zusätze. *a.* Die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse, welche Jupiter um die Sonne beschreibt, sind $ae\cos(\omega + 180^0) = -\,af$, $ae\sin(\omega + 180^0) = -\,ag$, und dieselben Coordinaten für Saturn $= -\,a'f'$, $-\,a'g'$. Aus den Ausdrücken für f, .. g' findet sich aber

$$-\,af = p\cos\chi_1 + q\cos\chi_2,\quad -\,a'f' = p'\cos\chi_1 - q'\cos\chi_2,$$
$$-\,ag = p\sin\chi_1 + q\sin\chi_2,\quad -\,a'g' = p'\sin\chi_1 - q'\sin\chi_2,$$

wo, wenn man wiederum a' zur Längeneinheit nimmt (§.173.),

$$p = 0,545317 \times 0,043472 = 0,023706,$$
$$q = 0,545317 \times 0,015972 = 0,008710,$$
$$p' = 0,035172,\quad q' = 0,048414,\text{ und überdies}$$
$$\chi_1 = \psi_1 + 180^0 = 210^0\,20'\,10'' + t\,.\;\;3'',483,$$
$$\chi_2 = \psi_2 + 180^0 = 127\;\;33\;\;34\;\;+ t\,.\,22\;,038.$$

Zieht man daher von der Sonne S aus (Fig. 45.) in der Ebene der Ekliptik, mit welcher man sich gegenwärtig die Bahnebenen von Jupiter und Saturn zusammenfallend denken kann, eine Linie $SQ = q$, welche mit der Abscissenaxe, d. i. mit der Linie von S nach dem Frühlingsäquinoctium am 1. Januar 1800, einen Winkel $= \chi_2$ macht, und nach der entgegengesetzten Richtung von SQ eine Linie $SQ' = q'$; zieht man ferner, unter einem Winkel $= \chi_1$ mit der Abscissenaxe, die Linien $QP = p$ und $Q'P' = p'$: so sind P und P' die Oerter der Mittelpunkte der vom Jupiter und Saturn beschriebenen Ellipsen zur Zeit t. Im Verlauf der Zeit werden sich daher die gleich lang bleibenden Linien SQ und SQ' um S, QP um Q und $Q'P'$ um Q' gleichförmig und nach derselben Richtung, wie die Planeten um die Sonne, drehen, so dass Q und Q' mit S stets in gerader Linie und QP und $Q'P'$ sich stets parallel bleiben. Dabei werden die Umdrehungszeiten der Linie $Q'SQ$ und der Linien QP und $Q'P'$ resp. $\frac{360^0}{22'',038}$ und $\frac{360^0}{3'',483}$ d. i. beiläufig 58800 und 372000 Jahre betragen.

b. Dieselbe Relation, die wir in §. 171. *a.* zwischen den Quadraten der Neigungen zweier sich störenden Planeten fanden, hat auch zwischen den Quadraten ihrer Excentricitäten statt. Denn aus den Formeln (ϑ) des vorigen §. folgt:

$$e^2 = f^2 + g^2 = i_2^2 k_1^2 + i_1^2 k_2^2 - 2 i_1 i_2 k_1 k_2 \cos(\psi_2 - \psi_1),$$
$$e'^2 = f'^2 + g'^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2 k_1 k_2 \cos(\psi_2 - \psi_1),$$

und daher $e^2 - i_1 i_2 e'^2 =$ einer von der Zeit unabhängigen Grösse. Zu Folge der Gleichungen (δ) und (α) ist aber $- i_1 i_2 = h = \frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}}$. Mithin ist auch

$$m \sqrt{a} \,.\, e^2 + m' \sqrt{a'} \,.\, e'^2 = \text{einer beständigen Grösse.}$$

Wie die Neigungen, können daher auch die Excentricitäten der Bahnen zweier einander störenden Planeten gewisse Grenzen nicht überschreiten, und wenn die eine wächst, muss die andere abnehmen.

§. 176.

Die in §. 163. in Bezug auf periodische Störungen gemachte Bemerkung, dass die Störung eines Planeten durch mehrere andere der Summe der Störungen, welche jeder der letztern einzeln hervorbringt, gleich ist, sobald die Quadrate und höheren Potenzen der störenden Massen vernachlässigt werden: diese Bemerkung leidet offenbar auch auf die Secularungleichheiten Anwendung.

So wurde in §. 165. für die seculare Geschwindigkeit, mit welcher die Excentricität der Bahn von m durch Einwirkung von m' geändert wird,

$$de = -\tfrac{1}{4} m'na^2a'B_2e'dt \,.\, \sin(\omega - \omega')$$

gefunden. Hierin ist B_2, folglich auch $-\tfrac{1}{4}aa'B_2$, eine von den constant bleibenden Elementen a und a' symmetrisch abhängige Function, die wir jetzt mit $(0,1)$, und die auf gleiche Weise aus a und a'', aus a' und a'', etc. gebildeten Functionen mit $(0,2)$, $(1,2)$, etc. bezeichnen wollen.

Wenn daher m, ausser durch m', noch durch die Planeten m'', etc. gestört wird, deren Elemente zur Zeit t ... a'', e'', ω'', etc. heissen, so wird sein:

$$de = andt\left\{m'e'(0,1)\sin(\omega-\omega') + m''e''(0,2)\sin(\omega-\omega'') + ..\right\}.$$

Eben so hat man für die gleichnamigen Störungen der Planeten m', m'', ... durch die jedesmal übrigen:

$$de' = a'n'dt\left\{me(1,0)\sin(\omega'-\omega) + m''e''(1,2)\sin(\omega'-\omega'') + ..\right\},$$

$$de'' = a''n''dt\left\{me(2,0)\sin(\omega''-\omega) + m'e'(2,1)\sin(\omega''-\omega') + ..\right\},$$

u. s. w. Aus diesen Gleichungen, in Verbindung mit den entsprechenden für $d\omega$, $d\omega'$, $d\omega''$, ... können durch ähnliche Kunstgriffe, wie in §. 174., die Secularungleichheiten selbst, denen e, e', ... und ω, ω', ... unterworfen sind, gefunden werden. Statt aber diese etwas weitläufige Rechnung hier anzustellen, mag nur noch gezeigt werden, wie mit Hülfe der für de, de', ... erhaltenen Gleichungen die merkwürdige Relation, die wir vorhin zwischen den Quadraten der Excentricitäten z w e i e r sich störenden Planeten fanden, auf das System a l l e r ausgedehnt werden kann.

Es kommt nämlich, wenn man diese Gleichungen resp. mit $\frac{me}{an}$, $\frac{m'e'}{a'n'}$, $\frac{m''e''}{a''n''}$, ... multiplicirt, sie hierauf addirt und noch bemerkt, dass die Function (0,1) wegen ihrer Symmetrie auch = (1,0), und eben so (0,2) = (2,0), (1,2) = (2,1), etc. ist:

$$\frac{m}{an} ede + \frac{m'}{a'n'} e'de' + \frac{m''}{a''n''} e''de'' + \ldots = 0, \text{ oder weil}$$

$$(a) \quad a\sqrt{a}\,.\,n = a'\sqrt{a'}\,.\,n' = a''\sqrt{a''}\,.\,n'' = \text{etc. ist:}$$

$$m\sqrt{a}\,.\,ede + m'\sqrt{a'}\,.\,e'de' + \ldots = 0.$$

Hieraus aber folgt:

$$(A) \quad m\sqrt{a}\,.\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,.\,e'^2 + m''\sqrt{a''}\,.\,e''^2 + \ldots = \text{einer constanten Grösse } C.$$

Weil alle Planeten sich nach derselben Richtung um die Sonne bewegen, und daher n, n', n'', ... einerlei Zeichen haben, so müssen in den Gleichungen (a), folglich auch in (A), die Wurzelgrössen $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, ... mit einerlei Zeichen, es sei mit dem positiven, genommen werden. Die Glieder auf der linken Seite von (A) sind dann insgesammt positiv; keines von ihnen kann folglich grösser werden, als die ebenfalls positive Constante C auf der Linken, und wenn die Excentricitäten einiger Planeten wachsen, so müssen die von anderen gleichzeitig abnehmen. Da ferner die Excentricitäten aller Planeten gegenwärtig sehr klein sind, und es daher auch C ist, so werden wenigstens die Excentricitäten des Jupiter, Saturn und Uranus, als derjenigen Planeten, denen die grössten Massen und grössten Entfernungen, und folglich in (A) die grössten Glieder zugehören, stets sehr klein bleiben. Anderweitige Untersuchungen haben gelehrt, dass dasselbe auch von den Excentricitäten der übrigen Planeten gilt. Méc. cél. Tome I. pag. 305.

§. 177.

Der Ausdruck für die seculare Geschwindigkeit, mit welcher sich die Neigung der Bahn von m durch die Störung von m' ändert (§. 168.):

$$\frac{dJ}{dt} = \tfrac{1}{4}\, m'na^2a'B_1J' \sin(\Theta - \Theta'),$$

ist dem für die Excentricität ganz ähnlich. Die in Betreff der letztern so eben gemachten Rechnungen und Schlüsse werden daher auch auf die Neigung Anwendung finden. Es wird mithin auch die in §. 171. *a*. erhaltene Relation zwischen den Quadraten der Neigungen zweier Planetenbahnen gegen eine feste Ebene auf das System aller Planeten erstreckt werden können und

$$(B)\quad m\sqrt{a}\,.\,J^2 + m'\sqrt{a'}\,.\,J'^2 + m''\sqrt{a''}\,.\,J''^2 + \ldots = \text{einer constanten Grösse } C'$$

sein. Die Neigungen werden folglich, so wie sie es jetzt sind, auch fortwährend sehr klein bleiben.

Auffallend hierbei ist der Umstand, dass die feste Ebene, auf welche in (B) die Neigungen bezogen werden, dafern sie nur mit einer, und folglich auch mit den übrigen Bahnen, sehr kleine Winkel macht, sonst jede beliebige sein kann; und es wird daher durch die Formel (B) noch eine andere merkwürdige Relation ausgedrückt sein. Um diese zu ermitteln, bezeichne man, wie in §. 168., die Nordpole der Bahnen von m, m', m'', ... mit P, P', P'', ... und den Nordpol der festen Ebene mit E. Man setze ferner der Kürze willen $m\sqrt{a} = c$, $m'\sqrt{a'} = c'$, etc., so wird die Formel:

$$c\,.\,EP^2 + c'\,.\,EP'^2 + c''\,.\,EP''^2 + \ldots = C'.$$

Sei nun A irgend ein Punkt in dem kleinen Stück der Kugelfläche, in welchem die Punkte E, P, P', ... enthalten sind, und welches wir hier als eben betrachten können, und werden in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem in dieser Ebene, welches A zum Anfangspunkte hat, die Coordinaten von E, P, P', ... resp. $= f, g;\ x, y;\ x', y'$; etc. gesetzt, so wird $EP^2 = (x-f)^2 + (y-g)^2$, etc. und damit

$$\begin{aligned}(b)\quad & c\,[(x-f)^2+(y-g)^2] + c'\,[(x'-f)^2 + (y'-g)^2] + \ldots \\ & = c\,(x^2+y^2) + c'\,(x'^2+y'^2) + \ldots + (c+c'+\ldots)(f^2+g^2) \\ & \quad - 2f\,(cx + c'x' + \ldots) - 2g\,(cy + c'y' + \ldots)\end{aligned}$$

= einer für alle Zeit beständigen und nur nach der verschiedenen Annahme von f und g wechselnden Grösse C'.

Die hierzu nöthige und hinreichende Bedingung ist, dass jede der drei Summen

$$c(x^2 + y^2) + c'(x'^2 + y'^2) + \ldots,$$
$$cx + c'x' + \ldots, \quad cy + c'y' + \ldots$$

für sich constant ist. Nun sind (§. 75.)

$$\frac{cx + c'x' + \ldots}{c + c' + \ldots} \text{ und } \frac{cy + c'y' + \ldots}{c + c' + \ldots}$$

die Coordinaten des Schwerpunktes der Punkte P, P', ..., wenn letzteren die Massen c, c', ... beigelegt werden. Dieser Schwerpunkt, und folglich auch die Ebene, welcher er als Pol zugehört, müssen daher bei allen Bewegungen der Pole P, P', ... in Ruhe bleiben.

In der Formel (B) für die Neigungen ist mithin zugleich der Beweis für das Vorhandensein einer ihre Lage nicht ändernden Ebene enthalten, — und zwar derselben, welche nach §. 89. vorzugsweise die unveränderliche genannt wird. Denn heisst Z der Mittelpunkt der Himmelskugel, so findet sich die Axe letzterer Ebene durch Zusammensetzung von Linien, welche die Richtungen ZP, ZP', ... haben und sich, ihren Längen nach, wie $m\sqrt{a}$, $m'\sqrt{a'}$, ..., d. i. wie c, c', ..., verhalten, also durch Zusammensetzung der Linien $c \,.\, ZP$, $c' \,.\, ZP'$, ... (§. 171. b.). Man hat aber nach §. 74. 2., wenn S der Schwerpunkt der n gleich schweren Punkte P, P', ... ist:

$$ZP + ZP' + \ldots \equiv n \,.\, ZS,$$

wo auch Z liegen mag; also auch, wenn c gleich schwere Punkte in P, c' eben so schwere in P', etc. vereinigt sind, d. h. wenn sich die Massen in P, P', ... wie c, c', ... verhalten, und S auch hier den Schwerpunkt bezeichnet:

$$c \,.\, ZP + c' \,.\, ZP' + \ldots \equiv (c + c' + \ldots)\, ZS.$$

Die aus $c \,.\, ZP$, $c' \,.\, ZP'$, ... zusammengesetzte Linie, also die Axe der unveränderlichen Ebene, wenn für Z wiederum der Kugel Mittelpunkt genommen wird, hat demnach ZS zur Richtung und folglich den Schwerpunkt S der Massen c, c', ... zum Pole, — wie zu erweisen stand.

Zusatz. Wählt man S zum Anfangspunkte der Coordinaten, so werden $cx + c'x' + \ldots = 0$ und $cy + c'y' + \ldots = 0$, und die Gleichung (b) reducirt sich auf

$$c \,.\, EP^2 + c' \,.\, EP'^2 + \ldots = c \,.\, SP^2 + c' \,.\, SP'^2 + \ldots + (c + c' \ldots)\, SE^2,$$

eine schon in §. 91. *c.* bemerkte Relation zwischen den Quadraten der Entfernungen der Massen c, c', .. von ihrem Schwerpunkte S und einem andern willkührlichen Punkte E. Zugleich geht daraus hervor, dass die Constante C' ($= c \,.\, EP^2 + ..$) am kleinsten wird, wenn man E mit S zusammenfallen lässt, d. h. wenn man die Neigungen der Bahnen auf die unveränderliche Ebene selbst bezieht.

Viertes Kapitel.

Von der Stabilität des Planetensystems.

§. 178.

Im vorigen Kapitel sind wir zu den für die Dauer des Planetensystems höchst wichtigen Resultaten gelangt: *dass erstens die mittlern Entfernungen der Planeten von der Sonne, und folglich auch ihre Umlaufszeiten, durch alle Zeit unverändert bleiben; dass zweitens die Excentricitäten ihrer Bahnen stets kleine Brüche und mithin die Bahnen selbst immer nahe kreisförmig bleiben, und dass es drittens eine Ebene von unveränderlicher Lage giebt, mit welcher die Bahnen stets nur kleine Winkel machen.* Können daher auch die Apsidenlinien, so wie die Knotenlinien mit jener Ebene, bedeutend ihre Lage ändern, ja sich um ganze Kreise drehen, so wird doch das ganze System sich von einem gewissen mittlern Zustande nie beträchtlich entfernen, sondern nur geringe Schwankungen um denselben machen.

Der bedeutendste unter den drei genannten Gründen für die stabile Dauer des Systems ist unstreitig der erste oder die Beständigkeit der mittlern Entfernungen. Im Obigen (§. 169.) haben wir uns von dieser Beständigkeit allerdings nur durch indirecte Schlüsse überzeugt und dabei nur die ersten Potenzen der störenden Massen, so wie der Excentricitäten und Neigungen, berücksichtigt. Allein Laplace,

der Entdecker dieser wichtigen Wahrheit, zeigte schon bei ihrer ersten Bekanntmachung im Jahre 1773, dass sie noch bei Rücksichtnahme auf die zweite und dritte Potenz der Excentricitäten und Neigungen Gültigkeit hat. Wenige Jahre später (1776) bewies Lagrange, dass sich für die mittlern Entfernungen selbst dann keine secularen Störungen zu erkennen geben, wenn man zwar nur die erste Potenz der Massen, aber noch alle höheren der Excentricitäten und Neigungen in Rechnung nimmt. Endlich hat Poisson (1808) dasselbe auch noch bei Berücksichtigung der Quadrate der Massen dargethan.

Dass die Excentricitäten und die Neigungen immer klein bleiben, hat hauptsächlich darin seinen Grund, dass alle Planeten sich nach einerlei Richtung um die Sonne bewegen, indem bei dieser Einrichtung in den Gleichungen (A) und (B) (§§. 176. und 177.) alle Glieder auf der linken Seite einerlei Zeichen haben. Wäre dagegen, um nur die Störungen ins Auge zu fassen, welche zwei Planeten wechselseitig auf ihre Excentricitäten e und e' ausüben, die Bewegung des einen der des andern entgegengesetzt, so hätten in der Gleichung:

$$m\sqrt{a}\,.\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,.\,e'^2 = \text{einer constanten Grösse,}$$

die zwei Glieder auf der linken Seite entgegengesetzte Zeichen, und e und e' würden gleichzeitig abnehmen und gleichzeitig wachsen. Auch würde unter leicht angebbaren Bedingungen ein Wachsthum ohne Grenzen eintreten können. Sind nämlich die zwei Bewegungen einander entgegengesetzt, so wird in §. 174. die Grösse $h, = m'\sqrt{a'} : m\sqrt{a}$, negativ, und es können dann die zwei Wurzeln i_1 und i_2 der Gleichung (δ),

$$= -\tfrac{1}{2}b\,(1-h) \pm \sqrt{[h + \tfrac{1}{4}b^2\,(1-h)^2]}$$

auch imaginär werden. Mit solchen Werthen von i_1 und i_2 finden sich aber die Grössen f, g, f', g', mithin auch die Excentricitäten $\sqrt{(f^2+g^2)}$ und $\sqrt{(f'^2+g'^2)}$, nicht mehr durch trigonometrische, sondern durch Exponentialfunctionen der Zeit, wie $A\,.\,\alpha^t$, ausgedrückt und können daher mit der Zeit ohne Ende zunehmen.

§. 179.

Noch müssen wir eines dem ersten Blicke nach sehr zufällig scheinenden Umstandes gedenken, der ganz besonders dazu beiträgt, dass sich das System von seinem mittleren Zustande nie bedeutend entfernen kann, und dass namentlich die periodischen Störungen nie eine allzubeträchtliche Grösse erreichen können. Es ist dies die Einrichtung, dass die Umlaufszeiten und folglich auch die mittleren Bewegungen der Planeten in incommensurabeln Verhältnissen zu einander stehen, von denen keines einem einfachen commensurabeln Verhältnisse nicht einmal sehr nahe kommt.

Um dieses so weit, als es hier thunlich ist, zu erläutern, wollen wir zu den in §. 158. gefundenen von den Excentricitäten unabhängigen Störungen der Länge und des Radius Vector zurückgehen. Von beiderlei Störungen hat der Coefficient des allgemeinen Gliedes den Divisor

$$i^2k^2 - 1 = [(i+1)\,n - in']\,[(i-1)\,n - in'] : n^2,$$

weil $k = (n - n') : n$. Da nun für i nach und nach alle ganzen Zahlen zu setzen sind, so würde, wenn das Verhältniss der mittlern Bewegungen $n : n'$ einem der Verhältnisse $i : i + 1$ oder $i : i - 1$, d. i. $1:2$; $2:3$; $3:4$; etc. oder $2:1$; $3:2$; $4:3$; etc. sehr nahe gleich käme, der entsprechende Coefficient sehr gross und damit eine sehr bedeutende Störung erzeugt werden.

Eben so erhellet, dass unter den von den ersten Potenzen der Excentricitäten und der Neigungen abhängigen Störungen, deren allgemeiner Coefficient (§§. 161. 162.)

$$(ik+1)^2 - 1 = i\,(n - n')\,[(i+2)\,n - in'] : n^2$$

zum Divisor hat, beträchtliche entstehen müssen, wenn das Verhältniss $n : n'$ von $i : i + 2$, also von einem der Verhältnisse ... $5:3$; $4:2$; $3:1$; $1:3$; $2:4$; $3:5$; ... wenig abweicht. Indessen sind hiervon die in der Natur vorkommenden Verhältnisse zwischen den mittleren Bewegungen viel zu sehr verschieden, als dass von dieser Seite her eine nur einigermassen beträchtliche Störung zu befürchten stände.

§. 180.

Unter allen Verhältnissen zwischen den mittlern Bewegungen der Planeten nähert sich einem einfachen rationalen Verhältnisse am meisten das zwischen den Bewegungen des Jupiter und Saturn, also merkwürdiger Weise das zwischen den Bewegungen der zwei grössten Planeten unsers Systems. Denn heissen U und U' die Umlaufszeiten und n und n' die mittlern Bewegungen des Jupiter und Saturn, so ist

$$U = 11,86197 \text{ und } U' = 29,45714 \text{ jul. Jahren,}$$

woraus $\frac{U}{U'} = \frac{n'}{n}$ überaus nahe $= \frac{60}{149}$, und schon sehr nahe $= \frac{2}{5}$ folgt, so dass die fünffache Bewegung Saturns von der doppelten Jupiters nur um einen geringen Theil der einen oder andern Bewegung selbst verschieden ist. Es kommt nämlich mit Anwendung des fast vollkommen richtigen Verhältnisses 60 : 149,

$$\frac{5U}{2U'} = \frac{5n'}{2n} = \frac{150}{149} \text{ und } 5n' - 2n = \frac{1}{74,5}\,n = \frac{1}{30}\,n'.$$

Auch finden sich in der That, wenn man in der Entwickelung der gegenseitigen periodischen Störungen des Jupiter und Saturn bis zur dritten Potenz der Excentricitäten inclus. fortgeht, Glieder, deren Coefficienten das Quadrat von $5n' - 2n$ zum Divisor haben und daher ungeachtet der hohen Potenz der Excentricitäten noch sehr gross, grösser als jede andere periodische Störung im ganzen Planetensystem*), ausfallen.

*) Die grösste periodische Längenstörung erleidet (Méc. cél., Tome III. pag. 95 – 146.)

Merkur durch Venus;	sie	beträgt	8″,5.
Venus durch Erde;	„	„	11 ,4.
Erde durch Jupiter;	„	„	6 ,8.
Mars durch Jupiter;	„	„	25 ,0.
Uranus durch Saturn;	„	„	149 ,7.

Die Störungen des Jupiter und Saturn, welche ihrer Grösse nach unmittelbar auf die im Texte angegebenen folgen, sind

für Jupiter durch Saturn ... 3′ 29″,0,
für Saturn durch Jupiter ... 11 9 ,4.

Nach Bouvard's astronomischen Tafeln (Paris, 1821) werden diese zwei sogenannten grossen Gleichungen des Jupiter und Saturn folgendergestalt berechnet. Zuerst sind für die mittlere Pariser Mitternacht, womit der 1. Januar 1800 anfängt, als Epoche, die stets vom mittlern Frühlingsäquinoctialpunkte in der Epoche an gerechneten mittlern Längen λ und λ' des Jupiter und Saturn:

$$\lambda = 81^0\,52'\,19'',3 + 30^0\,20'\,56'',718\,.\,t,$$
$$\lambda' = 123\;\;5\;\;29\;,4 + 12\;\;13\;\;16\;,127\,.\,t,$$

wo t die seit der Epoche verflossene Zeit, in julianischen Jahren ausgedrückt, bedeutet. Hiermit bestimmt man die Argumente

$$A = 5\lambda' - 2\lambda + 4^0\,10'\,4'',8 - 1'\,16'',403\,.\,t + 0'',013\,.\,t^2,$$
$$= 95^0\,52'\,53'',0 + 23'\,10'',795\,.\,t + 0'',013\,.\,t^2,$$
$$A' = A - 29'',8 - 0'',270\,.\,t;$$

und es sind dann die Gleichungen für die Länge

$$\text{Jupiters: } + (19'\,46'',619 - 0'',0347\,.\,t + 0'',000033\,.\,t^2)\sin A$$
$$- 12'',014 \sin 2A,$$
$$\text{Saturns: } - (47'\,52'',649 - 0'',0803\,.\,t + 0'',000082\,.\,t^2)\sin A'$$
$$+ (30'',504 - 0'',0017\,.\,t)\sin 2A'.$$

Die Periode jeder dieser beiden Gleichungen ist (§. 109.)

$$= \frac{360^0}{23'\,11''} = 932 \text{ Jahren.}$$

Der Anfang einer solchen Periode, d. i. einer der Zeitpunkte, wo die Argumente der Gleichungen $= 0$, mithin, zu Folge dieser Gleichungen allein, die Geschwindigkeit Jupiters am grössten und die des Saturn am kleinsten gewesen, ist

$$\frac{95^0\,52'\,53''}{23'\,11''} = 248 \text{ Jahre}$$

vor der Epoche, also um das Jahr 1552, eingetreten. Von da an nimmt 466 Jahre hindurch, also bis zum Jahre 2018, die Geschwindigkeit Jupiters ab und die des Saturn zu. Die Astronomen der letztverflossenen Jahrhunderte hatten diese Verzögerung des einen und Beschleunigung des andern Planeten aus Beobachtungen kennen gelernt und mussten diese Anomalieen bei Unkenntniss ihrer Periode um so auffallender

Digitized by Google

finden, als von allen andern Planeten die Umlaufszeiten sich durchaus constant gezeigt hatten. Nach mehrern vergeblichen Versuchen, den Grund dieser sonderbaren Erscheinung zu ermitteln, gelang es Laplace (im Jahre 1786) auch sie dem Gesetze der allgemeinen Schwere anzupassen und die oben angedeutete theoretische Erklärung ausfindig zu machen.

§. 181.

Zusätze. *a.* Dass durch die gegenseitige Einwirkung zweier Planeten die mittlere Geschwindigkeit des einen sich verringert, wenn die des andern grösser wird, und umgekehrt, dies lässt sich leicht mit Hülfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte darthun. Bedeuten nämlich die in §. 91. *b.* mit A, B, C bezeichneten Körper die Sonne und die beiden Planeten, und setzen wir demgemäss ihre Massen $a = 1$, $b = m$, $c = m'$, die Radien $AB = r$, $AC = r'$, und die durch AB und AC ausgedrückten relativen Geschwindigkeiten von B und C, wenn A ruhend angenommen wird, $= u$ nnd u', so verwandelt sich bei Weglassung der Quadrate und des Productes der Massen m und m' die Gleichung am Schlusse von §. 91. *c.* in

$$mu^2 + m'u'^2 = 2K\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'}\right) + \text{Const.}$$

Nach (11) in §. 52. ist aber, wenn a und a' die momentanen, d. i. die aus den jedesmaligen Werthen von r, u und r', u' abgeleiteten und daher wegen der gegenseitigen Störung von einem Zeitpunkte zum andern sich ändernden, halben grossen Axen der Bahnen von m und m' bedeuten:

$$u^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \text{ und } u'^2 = K\left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a'}\right),$$

(vergleiche §. 146.). Hierdurch wird die vorige Gleichung:

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} = \text{Const., und wegen } n^2a^3 = n'^2a'^3 = K:$$

$$m \,.\, n^{\frac{2}{3}} + m' \,.\, n'^{\frac{2}{3}} = \text{Const.}$$

Wenn daher n wächst, muss n' abnehmen, und umgekehrt.

b. In der letzten Gleichung sind n und n' die momentanen mittlern Bewegungen. Weil sie, eben so wie a und a', frei von secularen Störungen sind, so kann man $n = v + x$ und $n' = v' + x'$ setzen, wo v und v' durch alle Zeit constant, x und x' aber kleine Grössen von periodischer Natur bedeuten. Die vorige Gleichung wird damit:

$$m\,(v + x)^{\frac{2}{3}} + m'\,(v' + x')^{\frac{2}{3}} = \text{Const.},$$

folglich mit Weglassung der höhern Potenzen von x und x':

$$m\,.\,v^{-\frac{1}{3}}x + m'\,.\,v'^{-\frac{1}{3}}x' = m\,.\,n^{-\frac{1}{3}}x + m'\,.\,n'^{-\frac{1}{3}}\,.\,x' = \text{Const.}$$

oder

$$(\alpha)\;..\;m\sqrt{a}\,.\,x + m'\sqrt{a'}\,.\,x' = \text{Const.}$$

Wenden wir dieses auf Jupiter und Saturn an, wo die durch die grossen Gleichungen $19'\,47''$ sin A und $-\,47'\,53''$ sin A verbesserten mittlern Längen, wegen der langen Periode der erstern, als die momentanen mittlern Längen selbst erscheinen, und wo folglich die Geschwindigkeiten, mit denen sich diese Gleichungen ändern:

$$(5n' - 2n)\;19',8 \cos A \text{ und } -(5n' - 2n)\;47',9 \cos A,$$

die periodischen Glieder x und x' der mittlern Bewegungen, oder doch die vorzüglichsten unter diesen Gliedern, sein werden. Die Gleichung (α) geht damit über in:

$$(m\sqrt{a}\,.\,19',8 - m'\sqrt{a'}\,.\,47',9) \cos A = \text{Const.}$$

Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn die in cos A multiplicirte Grösse $= 0$, und damit

$$m\sqrt{a}\,.\,19',8 = m'\sqrt{a'}\,.\,47',9 \text{ ist.}$$

Die Coefficienten der grossen Gleichungen Jupiters und Saturns müssen daher, nahe wenigstens, im umgekehrten Verhältnisse der Massen und der Quadratwurzeln aus den mittlern Entfernungen stehen; was sich auch bestätigt findet, indem (§. 175.)

$$\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} = h = 0{,}408 \text{ und } \frac{19'\,47''}{47'\,53''} = 0{,}413 \text{ ist.}$$

§. 182.

Ausser der jetzt besprochenen Störung zwischen Jupiter und Saturn giebt es noch einige andere, deren Perioden

wegen des von einem einfachen rationalen Verhältnisse nicht allzuentfernten Verhältnisses zweier mittlern Bewegungen n und n' von langer Dauer sind. Jede periodische Störung der Länge, welche der Planet m' auf den Planet m ausübt, ist nämlich von der Form

$$(p) \quad A \sin(int - i'n't + \alpha),$$

wo i und i' zwei ganze Zahlen bedeuten; und jede dieser Störungen hat ihre entsprechende unter den von m auf m' ausgeübten Störungen:

$$(p') \quad A' \sin(i'n't - int + \alpha'), \;=\; -A' \sin(int - i'n't - \alpha'),$$

wo i und i' dieselben Zahlen wie vorhin bezeichnen. Die Periode jeder dieser beiden Störungen ist

$$= \pm \frac{360^0}{in - i'n'} = \pm \frac{UU'}{iU' - i'U},$$

und daher gegen die Umlaufszeiten U und U' sehr lang, wenn $iU' - i'U$ gegen U und U' sehr klein ist.

Beziehen sich z. B. n und n' auf Venus und Erde, so ist $U = 0{,}6152$ Jahr und $U' = 1$ Jahr, folglich

$$\frac{UU'}{2U' - 3U} = \frac{0{,}6152}{0{,}1544} = 4{,}0 \text{ Jahren},$$

$$\frac{UU'}{5U - 3U'} = \frac{0{,}6152}{0{,}0760} = 8{,}1 \text{ Jahren}.$$

Unter den gegenseitigen Störungen von Venus und Erde kommen daher zwei Paare mit den langen Perioden von 4 und von 8 Jahren vor, von denen das erstere $(2n - 3n')\,t$, das letztere $(5n' - 3n)\,t$ zum veränderlichen Theile seines Arguments hat. — Eben so entspringt daraus, dass die Umlaufszeit des Mars, $= 1{,}8808$ Jahr, nahe der doppelten der Erde gleichkommt, in dem Laufe der Erde und des Mars ein Paar von Störungen mit einer Periode von 16 Jahren; u. s. w.

Von zwei so zusammengehörigen Störungen (p) und (p') von langer Periode gilt übrigens eben so, wie dies bei Jupiter und Saturn gezeigt worden, der Satz, dass sich immer nahe $A : A' = m' \sqrt{a'} : m \sqrt{a}$ verhält.

Endlich zeichnen sich, wie die des Jupiter und Saturn, so auch alle andern Störungen von langer Periode, durch die Grösse ihrer Coefficienten merklich vor den übrigen aus.

§. 183.

Schlussbemerkung. Was in §. 145. über die Bestimmung der mittlern Elemente der Mondsbewegung gesagt worden, ist im Ganzen auch auf die Planeten anwendbar, nur dass hier als unbekannte Grössen noch die störenden Massen mit auftreten, — den Fall ausgenommen, wenn der störende Planet einer von denen ist, welche Begleiter haben, und wo seine Masse auf die in §. 66. gezeigte Weise bestimmt werden kann. — Weil die Planetenstörungen verhältnissmässig sehr gering sind, so wird man die Elemente der Bewegung schon unter der Voraussetzung, dass sie rein elliptisch ist, sehr nahe richtig bestimmen können. Man setze daher jedes Element = diesem seinen nahe richtigen Werthe + einer noch unbekannten, von der Ordnung der Massen zu betrachtenden, Correction und berechne mit diesen so zusammengesetzten Elementen des Planeten, so wie mit denen der Erde, für die Zeit, wo der Planet beobachtet worden, nach den gegebenen Formeln für die gestörte Bewegung die heliocentrischen Coordinaten des Planeten und der Erde, wobei in den Störungsgliedern die Massen und in dem elliptischen Theile die Correctionen der Elemente als Unbekannte vorkommen werden. Aus diesen heliocentrischen Coordinaten berechne man weiter die geocentrische Länge und Breite des Planeten und setze sie der beobachteten Länge und Breite gleich. Dies giebt zwei Gleichungen, in denen die Correctionen der Elemente und die Massen, von welchen beiden man immer nur die ersten Potenzen beibehält, die unbekannten Grössen sind. Jede andere Beobachtung giebt ein neues Paar solcher Gleichungen, und je mehr man derselben bildet, mit desto grösserer Schärfe wird man, die Methode der kleinsten Quadrate anwendend, jene Unbekannten zu bestimmen im Stande sein.

Anhang.

I. Beweis der Unveränderlichkeit der mittlern Entfernungen, nach LAGRANGE.

Der Satz, dass die mittlern Entfernungen der Plancten von der Sonne keine secularen Aenderungen erleiden, ist für die Astronomie von so hoher Wichtigkeit, nnd der in dem Falle, wenn bloss die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt werden, von Lagrange für diesen Satz gegebene Beweis so einfach und elegant, dass ich nicht nmhin kann zu versuchen, diesen Beweis meinen Lesern verständlich zu machen. Auch wird sich dabei Gelegenheit znr Erörterung noch einiger die Störungsrechnungen betreffenden sehr fruchtbaren Ansichten und Begriffe finden, welche im Vorigen unberührt geblieben sind.

1) Setzen wir, dass auf einen Planeten m ansser der Sonne M kein anderer Körper anziehend wirke, und dass er sich daher vollkommen elliptisch bewege. Im Zeitpnnkte T, wo seine Coordinaten $= r, l, b$, und die Geschwindigkeiten derselben $= r', l', b'$ seien, empfange er irgendwoher einen Stoss, wodurch die Geschwindigkeiten resp. die Incremente $\varDelta r'$, $\varDelta l'$, $\varDelta b'$ erhalten. Die Folge hiervon wird sein, dass er von T an in einer andern Ellipse, als vorher, fortgeht. So wie nämlich die Elemente seiner vorherigen elliptischen Bewegung nach der in §. 53. erklärten Methode aus r, l, b und r', l', b' zu bestimmen sind, so sind es die Elemente der nachherigen Bewegung aus r, l, b und $r' + \varDelta r'$, $l' + \varDelta l'$, $b' + \varDelta b'$.

2) Um das Gesagte nur auf das Element a anzuwenden, heisse u die Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn zur

Zeit T vor dem Stosse, $u + \Delta u$ die durch den Stoss in demselben Zeitpunkte geänderte Geschwindigkeit, und $a + \Delta a$ der dadurch geänderte Werth von a. Alsdann wird sein (§. 53. 3.)

$$(a)\quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{u^2}{\mu},\ \text{wo}\ \mu = k^2 \cdot K(M + m);$$

$$(b)\quad \frac{1}{a + \Delta a} = \frac{2}{r} - \frac{(u + \Delta u)^2}{\mu};$$

und wenn man (b) von (a) abzieht:

$$(c)\quad \frac{\Delta a}{a^2} - \frac{(\Delta a)^2}{a^3} + \ldots = \frac{2u\,\Delta u + (\Delta u)^2}{\mu}.$$

Nehmen wir an, dass der Stoss, und folglich Δu, also auch Δa, unendlich klein, $= du$ und da, sind, so wird die Relation (c) zwischen diesen Incrementen:

$$(d)\quad \frac{da}{a^2} = \frac{2udu}{\mu},$$

und ergiebt sich daher unmittelbar, wenn man (a) nach a und u differentiirt, r aber als constant ansieht.

3) Seien A_0, A_1, A_2, ... die Oerter eines Planeten in Zeitpnnkten, welche in unendlich kleinen einander gleichen Intervallen, deren m die Zeiteinheit ausmachen, auf einander folgen; also $m \,.\, A_0A_1$, $m \,.\, A_1A_2$, etc. seine Geschwindigkeiten in diesen Zeitpunkten (§. 10.). Wird nnn der Planet bloss von der Sonne angezogen, und bewegt er sich daher rein elliptisch, so wird man stets dieselben sechs Elemente seiner Bewegung finden, mag man sie aus dem Orte A_0 und der Geschwindigkeit $m \,.\, A_0A_1$, oder aus dem Orte A_1 und der Geschwindigkeit $m \,.\, A_1A_2$, u. s. w. nach den in §. 53. gegebenen Vorschriften ableiten. Wird aber die Bewegung des Planeten um die Sonne durch die Anziehung eines oder mehrerer anderer Körper gestört, so werden diese Systeme von Elementen von einem Zeitpunkte zum andern etwas Weniges von einander verschieden ausfallen, und man kann sich daher die gestörte Bewegung auch als eine elliptische vorstellen, bei welcher die Elemente sich fortwährend ändern. Wir wollen diese Elemente, zum Unterschiede von den bisher gebrauchten bloss von den Secularstörungen afficirten mittlern Elementen, die momentanen Elemente nennen.

4) Sei die Bewegung des Planeten eine gestörte, und die ihn zur Zeit T störende Kraft $= X$. Es ist dieses $X =$

dem Jncremente der Geschwindigkeit des Planeten, wenn die Kraft eine Zeiteinheit hindurch, ohne sich zu ändern, auf ihn gewirkt hat. Denkt man sich daher die störende Kraft den Planeten durch Stösse treibend, welche sich in jedem Zeitelemente dt wiederholen (§§. 20. und 21.), so ist Xdt die Geschwindigkeit, welche dem Planeten durch den Stoss im Zeitpunkte T mitgetheilt wird; $X'dt$ die Geschwindigkeit durch den nächstfolgenden, ein Zeitelement später eintretenden, Stoss, wenn X' die störende Kraft in diesem spätern Zeitpunkte bezeichnet; u. s. w. Durch jeden dieser Stösse werden aber gleichzeitig die momentanen Elemente um ein unendlich Weniges geändert.

Um insbesondere die Aenderung von a zu finden, zerlege man die Kraft X in zwei, von denen die eine U die Richtung der Bewegung hat, die andere V darauf perpendikular ist. Hierdurch zerlegt sich die durch den Stoss zur Zeit T erzeugte Geschwindigkeit Xdt in die Geschwindigkeiten Udt und Vdt nach denselben Richtungen, und die Geschwindigkeit u in der Bahn gewinnt damit das Increment $du = Udt$. Durch diese von einem fremden Stosse bewirkte Aenderung von u erhält aber nach 2) die mittlere Entfernung, wenn sie zur Zeit T, $= a$ war, das Increment

$$da = \frac{2a^2}{\mu} udu = \frac{2a^2}{\mu} uUdt;$$

und eine ähnliche Aenderung erleidet a zu Anfange jedes neuen Zeitelements dt. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich a zur Zeit T ändert, ist hiernach

$$= \frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} uU.$$

5) Um diese Geschwindigkeit von a berechnen zu können, muss zuvor noch die nach der Richtung der Bewegung geschätzte störende Kraft U bestimmt werden. Wir wollen das hierzu von Lagrange angegebene Verfahren gebrauchen, ein Verfahren, welches in seiner Allgemeinheit der ganzen höheren Mechanik zu grossem Nutzen gereicht hat, und welches sich für den vorliegenden Fall folgendergestalt am einfachsten und fasslichsten darstellen lassen möchte.

Befindet sich in S (Fig. 46.) die Sonne, in P der gestörte Planet, in P' der störende, dessen Masse, wie früher, m' heisse, so ist die störende Kraft aus zweien zusammengesetzt, von denen die eine, $= Km' : PP'^2$, die Richtung PP', die andere, $= Km' : SP'^2$, eine mit $P'S$ parallele Richtung hat (§. 94.). Die nach einer beliebigen Richtung PQ geschätzte störende Kraft ist hiernach = der Summe dieser beiden, nachdem man die erstere mit $\cos PQ \wedge PP'$, die letztere mit $\cos PQ \wedge P'S$, $= -\cos PQ \wedge SP'$, multiplicirt hat, also

$$= \frac{Km'}{PP'^2} \cdot \frac{PF}{PQ} - \frac{Km'}{SP'^2} \cdot \frac{GH}{PQ} = Z,$$

wenn F, G, H die Fusspunkte der von Q auf PP' und von P, Q auf SP' gefällten Perpendikel sind.

Man nehme nun PQ unendlich klein an, so wird:

$$\frac{PF}{PP'^2} = \frac{1}{FP'} - \frac{1}{PP'} = \frac{1}{QP'} - \frac{1}{PP'}, \text{ und damit}$$

$$Z = \frac{Km'}{PQ} \left\{ \frac{1}{QP'} - \frac{1}{PP'} - \frac{1}{SP'^2}\,(SH - SG) \right\}.$$

Es drückt aber $Km' \{\ldots\}$ das Increment der Grösse

$$Km' \left\{ \frac{1}{PP'} - \frac{1}{SP'^2} \cdot SG \right\}$$

aus, wenn P nach Q fortrückt. Man nennt diese Grösse die störende Function. Um aus ihr die nach einer beliebigen Richtung geschätzte störende Kraft zu finden, hat man also ihr Increment zu bestimmen, wenn P um einen unendlich kleinen Raum PQ nach dieser Richtung fortbewegt wird, und das Increment durch diesen Raum zu dividiren.

Man setze, wie in §. 95., $SP = r$, $SP' = r'$ und $PP' = \varrho$, so ist

$$\cos S = \frac{r^2 + r'^2 - \varrho^2}{2rr'}, \quad SG = r \cos S = \frac{r^2 + r'^2 - \varrho^2}{2r'},$$

und damit die störende Function, welche Ω heisse:

$$\Omega = Km' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{r^2 + r'^2 - \varrho^2}{2r'^3} \right).$$

6) Werde nun für PQ der Weg selbst genommen, welchen der Planet in dem auf T folgenden dt zurücklegt, so ist die nach der Richtung dieses Wegs geschätzte, vorhin

mit U bezeichnete, störende Kraft $= (d\Omega) : PQ$, wo $(d\Omega)$ die Aenderung bedeuten soll, welche die Function Ω durch die wirkliche Ortsveränderung des Planeten P während des auf T folgenden dt erfährt. Zugleich aber ist die Geschwindigkeit $u = PQ : dt$, und folglich

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \cdot \frac{PQ}{dt} \cdot \frac{(d\Omega)}{PQ} = \frac{2a^2}{\mu} \cdot \frac{(d\Omega)}{dt}.$$

7) Es kommt nun zunächst auf die Berechnung der Function Ω für die Zeit T an. Bezeichnen für diese Zeit l und l' die in der Bahn von P gerechneten Längen von P und P', und b' die Breite von P' in Bezug auf dieselbe Bahn, so ist (§. 96.)

$$\varrho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos b' \cos (l - l'),$$ und damit

$$\Omega = Km' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{r}{r'^2} \cos b' \cos (l - l')\right) *),$$

worin noch für die Coordinaten r, l, r', l', b' ihre elliptischen Werthe, durch die zur Zeit T statt findenden Elemente beider Bahnen ausgedrückt, zu setzen sind.

---

*) Man sieht bald, wie man aus dieser Formel die in §. 95. erhaltenen Ausdrücke für die drei rechtwinklig coordinirten störenden Kräfte ableiten kann. Denn znerst ist die nach der Richtung von r geschätzte Kraft = der partiellen Differenz

$$\frac{d\Omega}{dr} = - Km' \left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{r'^2} \cos b' \cos (l - l')\right).$$

Substituirt man hierin den aus der Gleichung für ϱ fliessenden Werth von

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{r}{\varrho} - \frac{r'}{\varrho} \cos b' \cos (l - l'),$$

so findet sich der mit m' multiplicirte Theil der Kraft T in §. 95. — Eben so erhält man die dort mit V bezeichnete Kraft durch eine Verrückung des Planeten um rdl, während r ungeändert bleibt, also $V = \frac{d\Omega}{rdl}$.

Um endlich die Kraft W zn finden, lege man dem Planeten eine Breite b in Bezng auf seine Bahn bei, wodurch

$$\varrho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' (\sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos (l - l'))$$

wird, und man bekommt $W = \frac{d\Omega}{rdb}$, nachdem man in der Entwickelung dieser partiellen Differenz $b = 0$ gesetzt hat.

Lassen wir für's Erste die Excentricitäten und die gegenseitige Neigung beider Bahnen unberücksichtigt, so wird

$$\varrho^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\lambda - \lambda'),$$

$$\Omega = Km' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{a}{a'^2} \cos(\lambda - \lambda')\right) = \tfrac{1}{2} Km' \Sigma A_i \cos i (\lambda - \lambda')\ ^{*)},$$

worin A_i eine Function von a, a' und der Stellenzahl i ist (§§. 157. und 158.).

Um hieraus den Werth von Ω, insofern er von den Excentricitäten abhängig ist, zu ermitteln, hat man statt der mittlern Werthe der beiden Radien und der beiden Längen ihre elliptischen $r = a + x$, $l = \lambda + y$, $r' = a' + x'$, $l' = \lambda' + y'$ zu setzen (§. 159.), wo

$$x = -ae \cos(\lambda - \omega) + \tfrac{1}{2} ae^2 (1 - \cos 2(\lambda - \omega)) + \ldots,$$

$$y = 2e \sin(\lambda - \omega) + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2(\lambda - \omega) + \ldots,$$

$$x' = -a'e' \cos(\lambda' - \omega') + \ldots, \quad y' = 2e' \sin(\lambda' - \omega') + \ldots$$

ist (§. 51.). Der Anfang der dazu nöthigen Rechnung ist der in §. 159. geführten ähnlich. Es wird nämlich, wenn man jenen mittlern Werth von Ω, $= O$ setzt, der elliptische

$$\Omega = O + x\frac{dO}{da} + y\frac{dO}{d\lambda} + x'\frac{dO}{da'} + y'\frac{dO}{d\lambda'}$$

$$+ \tfrac{1}{2} x^2 \frac{d^2O}{da^2} + xy \frac{d^2O}{da\,d\lambda} + xx' \frac{d^2O}{da\,da'} + \ldots + \tfrac{1}{6} x^3 \frac{d^3O}{da^3} + \ldots$$

Ohne aber diese Rechnung hier anfangen, und noch weniger sie weiter ausführen zu wollen, so erhellet schon aus der dortigen und aus früheren ähnlichen Rechnungen, dass, bis zu welcher Ordnung der Excentricitäten man auch fortgehen mag, alle Glieder in der Reihenentwickelung von Ω von der Form

$$Km'.\, C \cos(i\lambda - i'\lambda' + \gamma)$$

---

*) Aus diesem mittlern Werthe von Ω ergeben sich nach voriger Anmerkung die von den Excentricitäten unabhängigen störenden Kräfte in der Richtung des Radius

$$\frac{d\Omega}{da} = \tfrac{1}{2} Km' \Sigma \frac{dA_i}{da} \cos i (\lambda - \lambda'),$$

und perpendikular darauf in der Bahnebene

$$\frac{d\Omega}{a\,d\lambda} = -\tfrac{1}{2} Km' \Sigma i A_i \sin i (\lambda - \lambda'),$$

Ausdrücke, welche mit den auf ganz andere Weise in §. 158. gefundenen vollkommen übereinstimmen.

sein werden, wo C und γ Functionen der Elemente beider Bahnen sind, i und i' aber ganze Zahlen bedeuten, die alle positiven und negativen Werthe, Null nicht ausgeschlossen, annehmen können.

Endlich ist klar, dass eine Reihe von derselben Form für Ω auch dann sich ergeben muss, wenn noch auf den vorhin weggelassenen Factor $\cos b'$ mit Rücksicht genommen wird. Denn es ist

$$\cos b' = 1 - \tfrac{1}{2}\sin b'^2 + \ldots = 1 - \tfrac{1}{2}\sin \iota^2 \sin(\lambda' - \vartheta)^2 + \ldots$$
$$= 1 - \tfrac{1}{4}\iota^2 (1 - \cos 2(\lambda' - \vartheta)) + \ldots,$$

mit welcher nach den geraden Potenzen der Neigung fortgehenden Reihe ein Theil der Glieder in der vorigen Entwickelung von Ω multiplicirt werden muss. Offenbar aber können dadurch keine Glieder von anderer Form, als der schon bemerkten, zum Vorschein kommen.

Nach diesem Allen kann die für Ω sich bildende Reihe ausgedrückt werden durch

$$\Omega = Km' [A + \Sigma C \cos(i\lambda - i'\lambda' + \gamma)],$$

mit der Erinnerung, dass in dem summatorischen Gliede i und i' nicht zugleich $= 0$ anzunehmen sind, indem das dadurch entstehende von λ und λ' freie und bloss von den Elementen abhängige Glied schon durch A sich dargestellt findet.

8) In der Reihe für Ω sind, streng genommen, nicht bloss die mittlern Längen λ und λ', sondern auch A, C und γ, als Functionen der zur Zeit T statt findenden Elemente beider Planeten, mit T selbst veränderlich. Da aber die Aenderungen der Elemente, als von den gegenseitigen Störungen herrührend, m' oder m zum Factor haben, und Ω eine mit m' multiplicirte Grösse ist, so sind, wenn wir bloss die erste Potenz der Massen berücksichtigen, A, C und γ als constant zu betrachten.

Unter dieser Annahme, die von jetzt an fest gehalten werden soll, ist λ die einzige in Ω vorkommende Grösse, welche sich bei der Bewegung des Planeten P ändert, und man wird folglich die durch diese Bewegung während dt

entstehende Aenderung von Ω finden, wenn man Ω bloss nach λ differentiirt, also:

$$(d\Omega) = -Km'd\lambda\Sigma iC \sin(i\lambda - i'\lambda' + \gamma).$$

Hiermit, und weil $d\lambda = ndt$ und $\mu = K(M + m)$ ist, findet sich nach 6) die Geschwindigkeit von a:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{m'}{M+m} \cdot 2a^2n\Sigma iC \sin(i\lambda - i'\lambda' + \gamma).$$

Es sind aber n und n' die Geschwindigkeiten von λ und λ', und daher $\sin(i\lambda - i'\lambda' + \gamma)$ die Geschwindigkeit von $-\frac{\cos(i\lambda - i'\lambda' + \gamma)}{in - i'n'}$; mithin muss

$$a = \frac{m'}{M+m} \cdot 2a^2\Sigma \frac{in}{in - i'n'} C \cos(i\lambda - i'\lambda' + \gamma) + \text{Const.}$$

sein. Der mit T sich ändernde Theil von a besteht demnach aus periodischen Gliedern, welche von dem jedesmaligen Stande der beiden Planeten gegen einander und gegen ihre Apsiden und Knoten abhängen. Auch kann keines dieser Glieder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, oder unendlich gross werden, weil i und i' nie zugleich null sind, und das Verhältniss $n : n'$ incommensurabel ist. *Die von der ersten Potenz der störenden Masse abhängigen Störungen der mittlern Entfernung sind demnach, wie weit man auch die Approximation in Beziehung auf die Excentricitäten und die Neigung treiben mag, keine secularen, sondern bloss periodische Störungen.*

Da endlich bei zwei oder mehrern störenden Planeten die Totalstörung, so lange nur die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt werden, einfach der Summe der von den einzelnen Planeten bewirkten Störungen gleich ist (§. 163.), *so muss der bloss für Einen störenden Planeten bewiesene Satz auch bei jeder beliebigen Anzahl solcher Körper in Richtigkeit sein.*

II. Ueber die Methode der speciellen Störungen.

Die im dritten und vierten Abschnitte dargestellte Methode, die Störungen zu berechnen, welche ein Himmelskörper in dem Laufe eines andern hervorbringt, beruht auf

der Entwickelung von Reihen, welche nach den Potenzen der Excentricitäten und der gegenseitigen Neigung der Bahnen beider Körper fortgehen. Soll daher diese Methode angewendet werden können, so müssen, damit die Reihen schnell genug convergiren, die Excentricitäten und die Neigung nur klein sein. Werden diese Bedingungen nicht erfüllt, was namentlich bei den Kometen und mehr und weniger bei den vier neu entdeckten Planeten der Fall ist, so muss man auf eine andere Methode bedacht sein, welche von Reihenentwickelungen frei ist. Eine solche andere Methode ist die der speciellen Störungen. Sie besteht im Wesentlichen darin, dass man, wenn die momentanen Elemente des gestörten Planeten für einen gewissen Zeitpunkt (I. 3)) gegeben sind, einen von diesem Punkte anfangenden Zeitraum, innerhalb dessen auf die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Elemente ändern, die Aenderungen selbst noch keinen merkbaren Einfluss haben, durch einander nahe genug liegende Zeitpunkte in gleiche Theile theilt; dass man mit den Elementen im Anfangspunkte, die Geschwindigkeiten berechnet, mit denen sich die Elemente in diesem und den folgenden Theilpunkten ändern, und dass man hierauf aus diesen Geschwindigkeiten und aus den Werthen der Elemente im Anfangspunkte nach einem unter dem Namen der mechanischen Quadratur bekannten Verfahren ihre Werthe für jeden der übrigen Theilpunkte ableitet, um somit durch Interpolation ihre Werthe für irgend einen dazwischen fallenden Zeitpunkt, und aus diesen nach bekannten Regeln die Coordinaten des gestörten Körpers für denselben Zeitpunkt berechnen zu können.

Während daher die erstere Methode allgemeine Formeln für die Zusätze aufstellt, welche an den mit gewissen mittlern Elementen nach der elliptischen Theorie berechneten Coordinaten der Störungen wegen anzubringen sind, und wonach diese Zusätze für jeden Zeitpunkt ohne Weiteres berechnet werden können, vermag die letztere Methode bloss die Geschwindigkeiten der Elemente durch allgemeine Formeln auszudrücken, und kann aus den für einen gewissen Zeitpunkt gegebenen Elementen zu denen eines spätern Zeit-

punktes nicht auf einmal, sondern nur schrittweise durch Berechnung der nach und nach eintretenden Aenderungen gelangen.

Es ist nicht meine Absicht, hier eine nähere Anleitung zur Berechnung dieser speciellen Störungen zu geben. Man findet alles deshalb zu wissen Nöthige zusammengestellt in zwei in den Berliner Jahrbüchern für 1837 und 1838 enthaltenen Abhandlungen Encke's: *über mechanische Quadratur* und *über die Berechnung der speciellen Störungen*, worin ihr Herr Verfasser die ihm früher von Gauss über diese Gegenstände mitgetheilten und später von ihm selbst bei Kometen und den kleinen Planeten so häufig angewendeten Formeln und Methoden veröffentlicht und mit einer reichen Anzahl die practische Anwendung betreffender Bemerkungen, so wie mit einem ausführlichen Beispiele, begleitet hat.

Für gegenwärtigen Zweck setze ich nur hinzu, dass man zu den Formeln für die Geschwindigkeiten, mit denen sich die momentanen Elemente des gestörten Planeten ändern, mit Hülfe desselben Princips gelangen kann, dessen wir uns im Obigen bei der Bestimmung der Geschwindigkeit der mittlern Entfernung bedienten. Es wird nämlich jede der Gleichungen, welche die Elemente, durch die Coordinaten und deren Geschwindigkeiten ausgedrückt, darstellen (§. 53.), nach den Elementen und den Geschwindigkeiten differentiirt, und sodann für das Differential jeder Geschwindigkeit die mit dem Differential der Zeit multiplicirte Kraft gesetzt, welche nach der Richtung der Geschwindigkeit wirkt, worauf, wenn man noch jede dieser Gleichungen mit letzterem Differential dividirt, die gesuchten Ausdrücke für die Geschwindigkeiten der Elemente hervorgehen.

So ist z. B. die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Länge l des Planeten ändert, $= l' = \sqrt{(\mu p)} : rr$, folglich die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet in perpendikularer Richtung auf dem Radius in der Ebene der Bahn fortgeht, $= rl' = \sqrt{(\mu p)} : r$. Das Differential dieser Geschwindigkeit ist $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{dp}{r}$. Setzen wir daher die nach derselben Rich-

tung wirkende im Früheren mit V bezeichnete Kraft $= Km'Q$, wo Q eine aus §. 95. bekannte Function der Coordinaten des gestörten nnd des störenden Planeten ist, so wird $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{dp}{r} = Km'Qdt$, und somit die Geschwindigkeit der Aenderung des halben Parameters:

$$\frac{dp}{dt} = 2Km'\sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot rQ = \frac{m'}{M+m} \cdot 2n\sqrt{a^3p} \cdot rQ,$$

weil $\mu = K(M+m) = n^2a^3$ ist.

Statt einer weiteren Ausführung dieses Gegenstandes will ich zum Schlusse des Ganzen noch einen Satz entwickeln, durch den man, sollte er auch nicht bei der wirklichen Berechnung von Nutzen sein, von den Aenderungen, welche die verschiedenen Elemente eines Planeten durch eine augenblickliche Störung erleiden, wenigstens eine sehr anschauliche Uebersicht gewinnt.

1) Befindet sich die Sonne in S und der Planet zu einer gewissen Zeit T in P, so ist seine elliptische Bewegung gegeben, wenn noch der zweite Brennpunkt F der Ellipse, oder ihr zwischen S und F mitten inne liegender Mittelpunkt M gegeben ist. Denn erstens ist die Ebene der Ellipse einerlei mit der Ebene des Dreiecks SPF, und daher ihrer Lage nach gegeben. Sodann ist ihre grosse Axe $= SP + FP$, ihre Excentricität $= SF:(SP+FP)$, und ihr Perihel liegt von S aus nach der Richtung FS, wodurch ihre Grösse, Form und Lage in der Ebene SPF gegeben sind. Endlich ist mit der grossen Axe auch die Umlaufszeit bekannt; hierdurch aber und daraus, dass der Planet zur Zeit T sich in P befindet, lässt sich sein Ort in der Ellipse für jeden andern Zeitpunkt ermitteln.

2) Empfängt nun der Planet in P, bis wohin er in der durch S, P und F bestimmten Ellipse fortgegangen ist, einen fremdartigen Stoss, so wird er eine andere Ellipse zu beschreiben anfangen, deren zweiter Brennpunkt F' nnd deren Mittelpunkt M' sei. Die Elemente der letztern Ellipse werden eben so durch S, P und F', wie die der erstern durch S, P und F, bestimmt sein, und man wird die durch den Stoss bewirkte Aenderung der Elemente des Planeten voll-

ständig anzugeben vermögen, wenn man die Aenderung des Ortes des zweiten Brennpunktes, oder auch die damit parallele und halb so grosse Ortsänderung des Mittelpunktes der Ellipse, zu bestimmen im Stande ist. So wird z. B. die grosse Axe um *F'P* — *FP* sich ändern, und die Apsidenlinie wird aus der Richtung *FS* in *F'S* übergehen.

3) Um die Verrückung von *F* oder *M* jetzt näher zu bestimmen, stelle die in der Ebene *SPM* enthaltene Linie *PQ* (Fig. 47.) die Geschwindigkeit des Planeten in *P* vor dem Stosse dar. Die ihm durch den Stoss ertheilte Geschwindigkeit sei gegen erstere sehr klein und $\equiv QR$, folglich *PR* die Geschwindigkeit unmittelbar nach demselben. Werde ferner die Excentricität der Ellipse so klein angenommen, dass ihr Quadrat vernachlässigt, und mithin die Ellipse selbst als ein Kreis angesehen werden kann (§. 42.), dessen Mittelpunkt vor dem Stosse *M* ist, und dessen Halbmesser *MP* nach der Natur des Kreises in der Ebene *SPQ* auf *PQ* perpendikular steht. Aus gleichem Grunde wird nach dem Stosse der Mittelpunkt *M'* in der Ebene *SPR* in einer auf *PR* perpendikularen Linie liegen.

4) Man kennt somit die Richtung, nach welcher hin der Punkt *M'* von *P* aus liegt, und es ist nur noch übrig die Länge von *PM'* zu bestimmen. Zu dem Ende erinnere man sich des Satzes, dass die Flächengeschwindigkeit von einer Planetenbahn zur andern der Quadratwurzel aus dem Parameter proportional ist (§. 52.). Nun sind die Flächengeschwindigkeiten vor und nach dem Stosse = den Dreiecksflächen *SPQ* und *SPR*, und die halben Parameter = den mittlern Entfernungen *MP* und *M'P* oder den Halbmessern der beiden Kreise, wegen Vernachlässigung des Quadrats der Excentricität (§. 49.). Es verhält sich demnach

$$\sqrt{MP} : \sqrt{M'P} = SPQ : SPR.$$

Es ist aber

$$SPQ = \tfrac{1}{2} SP \,.\, PQ \,.\, \sin SPQ \text{ und}$$
$$SPR = \tfrac{1}{2} SP \,.\, PR \,.\, \sin SPR.$$

Weil ferner die Winkel *SPQ* und *SPR* nur sehr wenig von einander verschieden sind und überdies wegen der ge-

ringen Excentricität nur wenig von 90⁰ abweichen, so sind ihre Sinus einander gleich zu achten, und es verhält sich daher

$$\Upsilon MP : \Upsilon M'P = PQ : PR,$$

oder, wenn man in PM' ein Stück PN von solcher Länge abschneidet, dass sich

$$(a)\quad PM : PN = PQ : PR \text{ verhält:}$$
$$\Upsilon PM : \Upsilon PM' = PM : PN, \text{ folglich}$$
$$PM : PN = PN : PM';$$

und wenn man noch auf PM' eine Linie $PO = PM$ trägt:

$$PO : ON = PN : NM',$$

also $ON = NM'$, weil PO und PN nur sehr wenig von einander verschieden sind.

5) Nehmen wir noch an, dass die Richtung QR des Stosses, und somit auch M', in der Ebene $SPQM$ enthalten ist. Wegen der rechten Winkel MPQ und NPR sind alsdann die Winkel MPN und QPR einander gleich, und deshalb und wegen (a) die Dreiecke MPN und QPR einander ähnlich, folglich auch MN auf QR perpendikular.

Sind demnach der Mittelpunkt M einer nahe kreisförmigen Planetenbahn, der Ort P des Planeten, seine auf MP sehr nahe perpendikulare Geschwindigkeit PQ und eine ihm durch einen Stoss in P in der Ebene der Bahn mitgetheilte gegen PQ sehr kleine Geschwindigkeit QR gegeben, so findet man die durch den Stoss bewirkte Verrückung des Mittelpunktes von M nach M' dadurch, dass man in der Bahnebene durch P und M zwei resp. auf PQ und QR perpendikulare Linien zieht, und dass man, wenn diese sich in N schneiden, von P nach N zu eine Linie PO = PM trägt und NM' = ON macht, so dass M' und O auf entgegengesetzte Seiten von N fallen.

6) Ist die Richtung QR des Stosses auf der Bahnebene SPQ perpendikular, so ändert diese ihre Lage und wird SPR, in welcher der neue Mittelpunkt M' dieselbe Lage, wie M, gegen S und P hat.

Zusätze. *a.* Setzen wir in dem noch Folgenden, dass der Stoss, wie in 5), in der Bahnebene selbst geschieht,

Digitized by Google

und nehmen wir zuerst den speciellen Fall an, dass seine Richtung in dieser Ebene auf *PQ* perpendikular ist, so ist es auch *MN* auf *PM*. Alsdann fallen *O* und *M'* mit *N* zusammen, und es steht daher auch *MM'* auf *QR* rechtwinklig.

b. Fällt *QR* in *PQ* selbst, sei es nach *P* zu, oder nach der entgegengesetzten Seite, so haben *PQ* und *PR*, folglich auch *PM* und *PM'*, einerlei Richtung, und es ist daher auch in diesem Falle *MM'* auf *QR* rechtwinklig.

c. In allen übrigen Fällen weicht *MM'* von der auf *QR* perpendikularen Lage *MN* ab. Indessen kann die grösste Abweichung nur $19^0\,28'$ ($=$ arc tang $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$) betragen. So gross findet sich nämlich das Maximum des Winkels an der Spitze *M* eines Dreiecks *NMM'*, welches die Eigenschaft hat, dass der Fusspunkt *O* eines von der Spitze auf die Basis *NM'* gefällten Perpendikels ausserhalb der Basis fällt, und dabei $ON = NM'$ ist.

d. Wird das Dreieck *PQR* um *P* im Sinne der Bewegung des Planeten (nach links) um 90^0 gedreht, so fällt es in das Dreieck *PMN*, und *QR* erhält einerlei Richtung mit *MN*. Man kann daher auch sagen: *die Richtung, nach welcher M fortrückt, weiche von der Richtung des Stosses, nachdem diese um 90^0 im Sinne der Planetenbewegung gedreht worden, nie allzubedeutend, höchstens um $19\frac{1}{2}^0$, ab.*

Mit Hülfe des so ausgedrückten Satzes kann man sich von der Beschaffenheit der Aenderungen der Elemente im Allgemeinen, ob und welche von ihnen wachsen, welche abnehmen, immer leicht Rechenschaft geben.

Bewegt sich z. B. der Planet *P* in einem widerstehenden Mittel, und wirkt daher auf ihn unausgesetzt eine störende Kraft nach der entgegengesetzten Richtung seiner Bewegung, so rückt nach jenem Satze der Mittelpunkt *M* stetig nach *P* hin; die mittlere Entfernung *MP* wird folglich immer kleiner, und damit auch die Umlaufszeit. Wenn daher, um diesen Gegenstand noch etwas näher in's Auge zu fassen, M_0, M_1, M_2, ... (Fig. 48.) die Oerter von *M* in Zeitpunkten, die um einander gleiche Zeitelemente getrennt sind, und P_0, P_1, P_2, ... die gleichzeitigen Oerter von *P* bezeichnen, so liegt M_1 von M_0 nach P_0 hin, M_2 von M_1 nach P_1 hin, u. s. w.;

und da zugleich P_0P_1, P_1P_2, ... Bogenelemente sind, welche M_0, M_1, ... zu Mittelpunkten haben, so ist die Bewegung von P der Bewegung des Endpunktes eines gespannten sich über der Curve $M_0M_1M_2$ ... aufwickelnden und damit immer kürzer werdenden Fadens vergleichbar.

Weil ferner bei der nahe constanten Geschwindigkeit von P die davon abhängige störende Kraft sich nahe constant bleibt, so werden auch die von letzterer abhängigen Verrückungen des Mittelpunktes M_0M_1, M_1M_2, etc. nahe einander gleich sein; und weil überdies die Richtung, nach welcher sich M bewegt, auf der des Planeten P perpendikular ist, so wird die Bewegung von M der von P in dem Verhältnisse von M_0M_1 zu P_0P_1 nahe ähnlich sein. Der Mittelpunkt der Bahn eines in einem widerstehenden Mittel sich bewegenden Planeten wird daher während jedes Umlaufs des Planeten einen kleinen Kreis beschreiben und darin stets um 90° hinter dem gleichzeitigen Orte des Planeten in seiner Bahn zurück sein; dabei wird während jedes Umlaufs die mittlere Entfernung MP um die Peripherie des kleinen Kreises kleiner werden, indem sich um ebensoviel der vorhin gedachte Faden aufwickelt. — Man sehe Fig. 49., wo A, B, C, D und a, b, c, d gleichzeitige Oerter von P und M vorstellen.

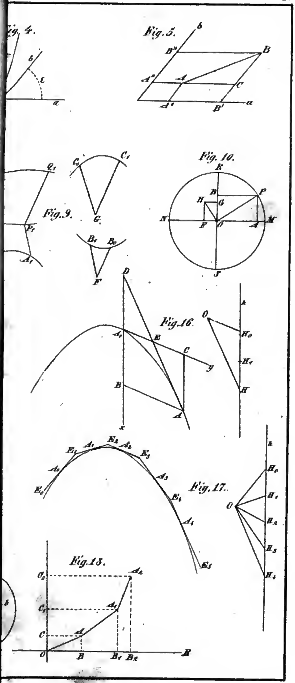
Noch erhellet aus dieser Kreisbewegung von M, dass die Apsidenlinie MS, während der Planet vom Perihel A zum Aphel C fortgeht, aus der Lage aS in cS übergehend, sich rückwärts dreht, und während der andern Hälfte der Umlaufszeit sich wieder vorwärts bewegt; dass endlich die Excentricität, $= MS : MP$, am kleinsten $= bS : bB$, und am grössten $= dS : dD$ ist, wenn sich der Planet zwischen Perihel und Aphel in der Mitte, resp. in B und D, befindet.

SBN 611723

Druckfehler und Verbesserungen.

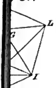
Seite 58 Zeile 13 v. o. statt $(n - l)$ lies $(n - l')$
„ 80 „ 2 v. u. statt $r = \alpha$ [lies $r = a$ [
„ 83 „ 16 v. u. lies $p = \frac{r^4 l'^2}{k^2}$
„ 117 „ 11 v. u. lies: dem Mittelpunkte S des
„ 131 „ 16 v. o. statt $1 - b$ lies $- b$
„ 144 „ 2 v. o. lies: Seien $A_0 A_1$ (Fig. 33*.)
„ 146 „ 5 v. u. statt $a + b + e$ lies $a + b + c + \ldots$
„ 161 „ 3 v. u. statt sich verringern lies: kleiner sein
„ 164 „ 11 v. u. lies Fig. 37*.
„ 176 „ 14 v. o. statt g_1 lies g_1
„ 189 „ 14 v. o. statt 16″ lies 16′
„ 197 „ 6 v. o. lies: durch die Gleichung (α) und durch
„ 290 setze statt der 4. und 3. Zeile v. u.: = einer für alle Zeit beständigen Grösse C, was man auch für Werthe den Constanten f und g beilegen mag.

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.



Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI
Digitized by Google



…g.30.

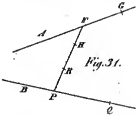


Fig.31.

o*

Fig.37.

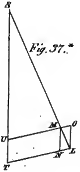


Fig.37.*

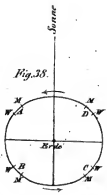


Fig.38.

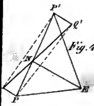


Fig.44.

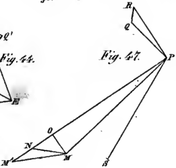


Fig.47.

Fig.49.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Google

Digitized by Google